Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Robert Denk
Mario Kaip

28. Mai 2010

Analysis II
7. Übungsblatt

Aufgabe 7.1 Sei $(X, \mathscr{A}, \mu)$ ein Maßraum. Zeigen Sie nun:

(i) Für alle $A, B \in \mathscr{A}$ gilt $A \setminus B, A \cap B \in \mathscr{A}$. Außerdem gilt $\mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(A \cap B)$, falls $\mu(A \cap B) < \infty$ ist.

(ii) Für alle $A, B \in \mathscr{A}$ mit $A \subset B$ gilt $\mu(A) \leq \mu(B)$.

(iii) Für jede Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{A}$ gilt $\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.

(iv) Für jede Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{A}$ mit $\mu(A_1) < \infty$ und $A_n \supset A_{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$ gilt schon

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \qquad \text{(vgl. Satz 4.7).}$$

Aufgabe 7.2 Zeigen Sie, dass keine σ-Algebra existiert kann, welche gleichmächtig zu $\mathbb{N}$ ist.

Hinweis: Sei $(X, \mathscr{A})$ ein Messraum und $x \in X$. Untersuchen Sie die kleinste Menge in $\mathscr{A}$, welche x enthält d.h. $E_x := \bigcap_{A\in\mathscr{A}: x\in A} A$.

Aufgabe 7.3 Sei X eine Menge und $\mathscr{D} \subset \mathscr{P}(X)$ mit

(I) $X \in \mathscr{D}$,

(II) $A \setminus B \in \mathscr{D}$ für alle $A, B \in \mathscr{D}$ mit $B \subset A$,

(III) $A \cap B \in \mathscr{D}$ für alle $A, B \in \mathscr{D}$,

(IV) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{D}$ für alle paarweise disjunkten Folgen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{D}$.

Zeigen Sie nun, dass $\mathscr{D}$ bereits eine σ-Algebra ist.

Aufgabe 7.4 Sei $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine bijektive, lineare Abbildung.

(i) Zeigen Sie, dass für alle $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ schon $T(A) \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ gilt.

(ii) Zeigen Sie, dass

$$\mu(A) := \lambda_n(T(A)), \quad A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$$

ein Maß auf der Borel-σ-Algebra $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ ist.

Hinweis: Betrachte sie die Messbarkeit von T^{-1}.

Abgabetermin: Freitag 4. Juni 2010, vor 10:00 Uhr in die Briefkästen bei F411.