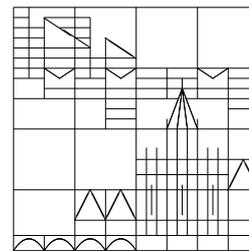


28. Mai 2010



## Analysis II 7. Übungsblatt

**Aufgabe 7.1** Sei  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  ein Maßraum. Zeigen Sie nun:

- (i) Für alle  $A, B \in \mathcal{A}$  gilt  $A \setminus B, A \cap B \in \mathcal{A}$ . Außerdem gilt  $\mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(A \cap B)$ , falls  $\mu(A \cap B) < \infty$  ist.
- (ii) Für alle  $A, B \in \mathcal{A}$  mit  $A \subset B$  gilt  $\mu(A) \leq \mu(B)$ .
- (iii) Für jede Folge  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$  gilt  $\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ .
- (iv) Für jede Folge  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$  mit  $\mu(A_1) < \infty$  und  $A_n \supset A_{n+1}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) gilt schon

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \quad (\text{vgl. Satz 4.7}).$$

**Aufgabe 7.2** Zeigen Sie, dass keine  $\sigma$ -Algebra existiert kann, welche gleichmächtig zu  $\mathbb{N}$  ist.

HINWEIS: Sei  $(X, \mathcal{A})$  ein Messraum und  $x \in X$ . Untersuchen Sie die kleinste Menge in  $\mathcal{A}$ , welche  $x$  enthält d.h.  $E_x := \bigcap_{A \in \mathcal{A}: x \in A} A$ .

**Aufgabe 7.3** Sei  $X$  eine Menge und  $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(X)$  mit

- (I)  $X \in \mathcal{D}$ ,
- (II)  $A \setminus B \in \mathcal{D}$  für alle  $A, B \in \mathcal{D}$  mit  $B \subset A$ ,
- (III)  $A \cap B \in \mathcal{D}$  für alle  $A, B \in \mathcal{D}$ ,
- (IV)  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{D}$  für alle paarweise disjunkten Folgen  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}$ .

Zeigen Sie nun, dass  $\mathcal{D}$  bereits eine  $\sigma$ -Algebra ist.

**Aufgabe 7.4** Sei  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine bijektive, lineare Abbildung.

- (i) Zeigen Sie, dass für alle  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$  schon  $T(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$  gilt.
- (ii) Zeigen Sie, dass

$$\mu(A) := \lambda_n(T(A)), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$$

ein Maß auf der Borel- $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$  ist.

HINWEIS: Betrachte sie die Messbarkeit von  $T^{-1}$ .