Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Robert Denk
Mario Kaip

4. Juni 2010

Analysis II
8. Übungsblatt

Aufgabe 8.1 Sei $(X, \mathscr{A})$ ein Messraum und $f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$ sei $\mathscr{A}$-$\mathscr{B}(\mathbb{R})$-messbar für $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie nun:

$$\{x \in X : f_1(x) < f_2(x)\} \in \mathscr{A}, \qquad \{x \in X : (f_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist konvergent}\} \in \mathscr{A}$$
$$\{x \in X : f_1(x) = f_2(x)\} \in \mathscr{A}.$$

Aufgabe 8.2 Sei $(X, \mathscr{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f \in \mathscr{L}^1(X, \mu)$. Beweisen Sie nun die folgenden Aussagen:

(i) Für jede Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{A}$ paarweise disjunkter Mengen gilt

$$\int_{\bigcup_{n=1}^\infty A_n} f d\mu = \sum_{n=1}^\infty \int_{A_n} f d\mu.$$

(ii) Die Abbildung

$$\nu : \mathscr{A} \to [0, \infty], \quad A \mapsto \int_A |f| d\mu$$

ist ein Maß auf $\mathscr{A}$.

Hinweis: Verwenden Sie den Satz von der majorisierten Konvergenz.

Aufgabe 8.3 Gegeben sei der Maßraum $(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}), \zeta)$, wobei ζ das Zählmaß aus Beispiel 4.5 (ii) sei. Berechnen Sie nun

$$\int_{\mathbb{N}} f d\zeta$$

für beliebiges $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{N}, \zeta)$.

Aufgabe 8.4 Sei $(X, \mathscr{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f \in \mathscr{L}^1(X, \mu)$. Zeigen Sie:

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall A \in \mathscr{A} : \left(\mu(A) < \delta \Rightarrow \int_A |f| d\mu < \varepsilon \right)$$

Hinweis: Annahme: Es existiert ein $\varepsilon > 0$ und $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{A}$ mit $\mu(E_n) < 2^{-n}$ und $\int_{E_n} |f| d\mu \geq \varepsilon$. Untersuchen Sie dann die Menge $A := \bigcap_{n=1}^\infty \bigcup_{i=n}^\infty E_i$.

Abgabetermin: Freitag 11. Juni 2010, vor 10:00 Uhr in die Briefkästen bei F411.