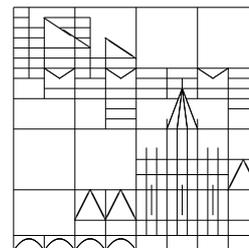


11. Juni 2010



Analysis II 9. Übungsblatt

Aufgabe 9.1 Für $p \in (1, \infty)$ definiert man die Funktion

$$f(t) := \begin{cases} 0, & \text{falls } t \in (0, \frac{1}{2}] \\ (\frac{2^n}{n})^{1/p}, & \text{falls } t \in (1 - \frac{1}{2^n}, 1 - \frac{1}{2^{n+1}}] \text{ mit } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Außerdem definiert man $\mathcal{L}^r((0, 1)) := \{g : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R} : g \text{ messbar und } \int_{(0,1)} |g(x)|^r dx < \infty\}$.
 Fertigen Sie ein Skizze der Funktion f an und zeigen Sie:

- (i) Es gilt $f \in \mathcal{L}^r((0, 1))$ für alle $r \in [1, p)$.
- (ii) Es gilt $f \notin \mathcal{L}^p((0, 1))$.

Aufgabe 9.2 Sei (X, \mathcal{A}, μ) ein Maßraum. Außerdem seien $f_n : X \rightarrow [0, \infty)$ ($n \in \mathbb{N}$) und $g : X \rightarrow [0, \infty)$ messbare Funktionen. Zeigen Sie nun:

- (i) Ist $f_n(x) \leq g(x)$ ($n \in \mathbb{N}, x \in X$) und $g \in \mathcal{L}^1(X, \mu)$, so gilt

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu \leq \int_X \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} f_n \right) d\mu$$

- (ii) Zeigen Sie, dass Aussage (i) im Allgemeinen nicht gilt, wenn man auf die Voraussetzungen $f_n(x) \leq g(x)$ ($n \in \mathbb{N}, x \in X$) und $g \in \mathcal{L}^1(X, \mu)$ verzichtet.

Aufgabe 9.3 Finden Sie zu den folgenden zwei Aussagen jeweils eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{L}^1((0, 1))$ positiver Funktionen, welche die Aussage erfüllt.

- (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$ für alle $x \in (0, 1)$ und $\left(\int_{(0,1)} f_n(x) dx \right)_{n \in \mathbb{N}}$ ist konvergent gegen eine Zahl ungleich Null.
- (ii) $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ ist für kein $x \in (0, 1)$ konvergent und $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{(0,1)} f_n(x) dx = 0$.

Aufgabe 9.4 Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ eine messbare Funktion. Zeigen Sie

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = \int_{[0, \infty)} \lambda(\{x \in \mathbb{R} : f(x) > t\}) dt.$$

HINWEIS: Stellen sie die Funktion f durch $f(x) = \int_{[0, f(x))} 1 dt$ dar.