Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Robert Denk
Mario Kaip

11. Juni 2010

Analysis II
9. Übungsblatt

Aufgabe 9.1 Für $p \in (1,\infty)$ definiert man die Funktion

$$f(t) := \begin{cases} 0, & \text{falls } t \in (0, \frac{1}{2}] \\ \left(\frac{2^n}{n}\right)^{1/p}, & \text{falls } t \in \left(1 - \frac{1}{2^n}, 1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right] \text{ mit } n \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

Außerdem definiert man $\mathscr{L}^r((0,1)) := \{g : (0,1) \to \mathbb{R} : g \text{ messbar und } \int_{(0,1)} |g(x)|^r dx < \infty\}$. Fertigen Sie ein Skizze der Funktion f an und zeigen Sie:

(i) Es gilt $f \in \mathscr{L}^r((0,1))$ für alle $r \in [1,p)$.

(ii) Es gilt $f \notin \mathscr{L}^p((0,1))$.

Aufgabe 9.2 Sei $(X, \mathscr{A}, \mu)$ ein Maßraum. Außerdem seien $f_n : X \to [0,\infty)$ $(n \in \mathbb{N})$ und $g : X \to [0,\infty)$ messbare Funktionen. Zeigen Sie nun:

(i) Ist $f_n(x) \leq g(x)$ $(n \in \mathbb{N}, x \in X)$ und $g \in \mathscr{L}^1(X,\mu)$, so gilt

$$\limsup_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu \leq \int_X \left(\limsup_{n\to\infty} f_n\right) d\mu$$

(ii) Zeigen Sie, dass Aussage (i) im Allgemeinen nicht gilt, wenn man auf die Voraussetzungen $f_n(x) \leq g(x)$ $(n \in \mathbb{N}, x \in X)$ und $g \in \mathscr{L}^1(X,\mu)$ verzichtet.

Aufgabe 9.3 Finden Sie zu den folgenden zwei Aussagen jeweils eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{L}^1((0,1))$ positiver Funktionen, welche die Aussage erfüllt.

(i) $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ für alle $x \in (0,1)$ und $\left(\int_{(0,1)} f_n(x)dx\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent gegen eine Zahl ungleich Null.

(ii) $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ ist für kein $x \in (0,1)$ konvergent und $\lim_{n\to\infty} \int_{(0,1)} f_n(x)dx = 0$.

Aufgabe 9.4 Sei $f : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ eine messbare Funktion. Zeigen Sie

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = \int_{[0,\infty)} \lambda(\{x \in \mathbb{R} : f(x) > t\})dt.$$

Hinweis: Stellen sie die Funktion f durch $f(x) = \int_{[0,f(x))} 1 dt$ dar.

Abgabetermin: Freitag 18. Juni 2010, vor 10:00 Uhr in die Briefkästen bei F411.