Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Robert Denk
Mario Kaip

18. Juni 2010

Analysis II
10. Übungsblatt

Aufgabe 10.1 Gegeben sei eine Kugel $K \subset \mathbb{R}^3$ mit Mittelpunkt 0 und Radius $R > 0$. Zudem sei

$$Z := \{(x, y, z)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq \rho^2\}$$

für ein $0 < \rho < R$. Berechnen Sie die Höhe h von $K \setminus Z$, sowie das Volumen $\lambda(K \setminus Z)$ und stellen Sie dieses als Funktion von h dar.

Aufgabe 10.2

(i) Es sei $\omega\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $\omega(x, h) := (x_2 - x_1)h_2 + x_2 h_1$. Berechnen Sie jeweils das Kurvenintegral $\int_\Gamma \omega$ wobei Γ durch $\gamma\colon [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$(a)\quad \gamma(s) := (s, s)^{\mathrm{T}}$, $\qquad (c)\quad \gamma(s) := (s, s^2)^{\mathrm{T}}$,

$(b)\quad \gamma(s) := (s^2, s)^{\mathrm{T}}$, $\qquad (d)\quad \gamma(s) := (s, \sin \frac{\pi s}{2})^{\mathrm{T}}$

dargestellt wird.

(ii) Es seien $f, g \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ und $\gamma \in C^1\big([a, b]; \mathbb{R}^n\big)$ stelle die Kurve Γ dar. Mit $f\,dg$ bezeichnet man die 1-Form $(x, h) \mapsto f(x)\,dg(x, h)$, $g\,df$ analog. Zeigen Sie nun

$$\int_\Gamma f\,dg = f\big(\gamma(b)\big)g\big(\gamma(b)\big) - f\big(\gamma(a)\big)g\big(\gamma(a)\big) - \int_\Gamma g\,df.$$

Aufgabe 10.3 In $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ sei durch $v(x) := \varphi\big(|x|\big)\binom{-x_2}{x_1}$ mit $\varphi \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathbb{R})$ ein Vektorfeld gegeben. Definiere $\omega\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ durch $\omega(x, h) := \langle v(x), h\rangle$.

(i) Sei Γ der positiv durchlaufene Kreis vom Radius r um den Nullpunkt. Skizzieren Sie v auf Γ und berechnen Sie $\int_\Gamma \omega$.

(ii) Sei $H := (0, \infty) \times \mathbb{R}$. Zeigen Sie: Wenn $\omega\,|_{H\times\mathbb{R}^2}$ exakt ist, dann folgt für $r > 0$ bereits

$$2\varphi(r) + r\varphi'(r) = 0.$$

Aufgabe 10.4 Berechnen Sie das Volumen von

$$E_n := \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^2}{a_k^2} \leq 1 \right\}, \qquad a_1, \ldots, a_n > 0$$

für die beiden Fälle $n \in \{2, 3\}$.

Abgabetermin: Freitag 25. Juni 2010, vor 10:00 Uhr in die Briefkästen bei F411.