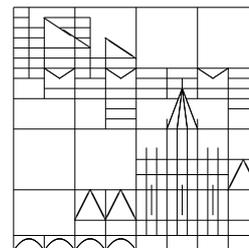


25. Juni 2010



Analysis II 11. Übungsblatt

Aufgabe 11.1 Berechnen Sie das Volumen $V := \int_T 1 \, d(x, y, z)$ und den Schwerpunkt

$$S := \frac{1}{V} \left(\int_T x \, d(x, y, z), \int_T y \, d(x, y, z), \int_T z \, d(x, y, z) \right)^T$$

des schiefen Turms

$$T := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \in [0, 10], \left(x - \frac{1}{10}z\right)^2 + \left(y - \frac{1}{10}z\right)^2 \leq 1 \right\}.$$

Erstellen Sie zudem eine Skizze von T .

Aufgabe 11.2 Für $r, h > 0$ seien die Menge $U := \{x \in \mathbb{R}^2 : 0 < |x| < r\}$ und die Funktion $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) := h\left(1 - \frac{|x|}{r}\right)$ definiert. Es sei $M := \{(x, z) \in \mathbb{R}^3 : x \in U, z = f(x)\}$.

- (i) Zeigen Sie, dass M eine 2-dimensionale Fläche im \mathbb{R}^3 ist, und berechnen Sie das Oberflächenintegral $\int_M dA$ mittels einer Parametrisierung γ .
- (ii) Beschreiben Sie nun M als Rotationsfläche und berechnen Sie damit wieder $\int_M dA$.
- (iii) Man könnte versucht sein das Prinzip von Cavalieri, in offensichtlich abgewandelter Version, auch für Oberflächen zu verwenden. Zeigen Sie am Beispiel von M , dass hier kein Analogon gilt.

Aufgabe 11.3 Zeigen Sie, dass

$$\int_M \left(\sum_{k=1}^3 \partial_k F_k(x) \right) dx = \int_{\partial M} \langle F(x), n(x) \rangle dA(x)$$

für $M := B(0, R) \subset \mathbb{R}^3$ mit $R > 0$ und $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $x \mapsto \frac{1}{3}x$ gilt. Dabei ist $n(x)$ für $x \in \partial M$ stets der nach außen gerichtete Normalenvektor zur Oberfläche ∂M am Punkt x .

Aufgabe 11.4 Der Staat Colorado erstreckt sich von 102° bis 109° westlicher Länge sowie von 37° bis 41° nördlicher Breite. Berechnen Sie die Fläche von Colorado, wobei die Erde als Kugel mit Radius $R = 6370$ km angenommen werde.

HINWEIS: Überlegen Sie sich, wie die Position von Colorado bezüglich Kugelkoordinaten beschreibbar ist.