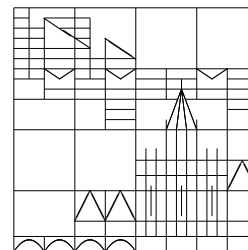


25. Juni 2010



## Analysis II 11. Übungsblatt

**Aufgabe 11.1** Berechnen Sie das Volumen  $V := \int_T 1 \, d(x, y, z)$  und den Schwerpunkt

$$S := \frac{1}{V} \left( \int_T x \, d(x, y, z), \int_T y \, d(x, y, z), \int_T z \, d(x, y, z) \right)^T$$

des schiefen Turms

$$T := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \in [0, 10], \left(x - \frac{1}{10}z\right)^2 + \left(y - \frac{1}{10}z\right)^2 \leq 1 \right\}.$$

Erstellen Sie zudem eine Skizze von  $T$ .

**Aufgabe 11.2** Für  $r, h > 0$  seien die Menge  $U := \{x \in \mathbb{R}^2 : 0 < |x| < r\}$  und die Funktion  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) := h\left(1 - \frac{|x|}{r}\right)$  definiert. Es sei  $M := \{(x, z) \in \mathbb{R}^3 : x \in U, z = f(x)\}$ .

- (i) Zeigen Sie, dass  $M$  eine 2-dimensionale Fläche im  $\mathbb{R}^3$  ist, und berechnen Sie das Oberflächenintegral  $\int_M dA$  mittels einer Parametrisierung  $\gamma$ .
- (ii) Beschreiben Sie nun  $M$  als Rotationsfläche und berechnen Sie damit wieder  $\int_M dA$ .
- (iii) Man könnte versucht sein das Prinzip von Cavalieri, in offensichtlich abgewandelter Version, auch für Oberflächen zu verwenden. Zeigen Sie am Beispiel von  $M$ , dass hier kein Analogon gilt.

**Aufgabe 11.3** Zeigen Sie, dass

$$\int_M \left( \sum_{k=1}^3 \partial_k F_k(x) \right) dx = \int_{\partial M} \langle F(x), n(x) \rangle dA(x)$$

für  $M := B(0, R) \subset \mathbb{R}^3$  mit  $R > 0$  und  $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, x \mapsto \frac{1}{3}x$  gilt. Dabei ist  $n(x)$  für  $x \in \partial M$  stets der nach außen gerichtete Normalenvektor zur Oberfläche  $\partial M$  am Punkt  $x$ .

**Aufgabe 11.4** Der Staat Colorado erstreckt sich von  $102^\circ$  bis  $109^\circ$  westlicher Länge sowie von  $37^\circ$  bis  $41^\circ$  nördlicher Breite. Berechnen Sie die Fläche von Colorado, wobei die Erde als Kugel mit Radius  $R = 6370$  km angenommen werde.

HINWEIS: Überlegen Sie sich, wie die Position von Colorado bezüglich Kugelkoordinaten beschreibbar ist.