Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Robert Denk
Mario Kaip

25. Juni 2010

Analysis II
11. Übungsblatt

Aufgabe 11.1 Berechnen Sie das Volumen $V := \int_T 1\, d(x,y,z)$ und den Schwerpunkt

$$S := \frac{1}{V}\left(\int_T x\, d(x,y,z), \int_T y\, d(x,y,z), \int_T z\, d(x,y,z)\right)^{\mathrm{T}}$$

des schiefen Turms

$$T := \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, z \in [0,10], \big(x - \tfrac{1}{10}z\big)^2 + \big(y - \tfrac{1}{10}z\big)^2 \le 1\big\}.$$

Erstellen Sie zudem eine Skizze von T.

Aufgabe 11.2 Für $r, h > 0$ seien die Menge $U := \big\{x \in \mathbb{R}^2 \colon 0 < |x| < r\big\}$ und die Funktion $f \colon U \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) := h\big(1 - \frac{|x|}{r}\big)$ definiert. Es sei $M := \big\{(x,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x \in U,\ z = f(x)\big\}$.

(i) Zeigen Sie, dass M eine 2-dimensionale Fläche im $\mathbb{R}^3$ ist, und berechnen Sie das Oberflächenintegral $\int_M dA$ mittels einer Parametrisierung γ.

(ii) Beschreiben Sie nun M als Rotationsfläche und berechnen Sie damit wieder $\int_M dA$.

(iii) Man könnte versucht sein das Prinzip von Cavalieri, in offensichtlich abgewandelter Version, auch für Oberflächen zu verwenden. Zeigen Sie am Beispiel von M, dass hier kein Analogon gilt.

Aufgabe 11.3 Zeigen Sie, dass

$$\int_M \left(\sum_{k=1} \partial_k F_k(x)\right) dx = \int_{\partial M} \langle F(x), n(x)\rangle\, dA(x)$$

für $M := B(0,R) \subset \mathbb{R}^3$ mit $R > 0$ und $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $x \mapsto \frac{1}{3}x$ gilt. Dabei ist $n(x)$ für $x \in \partial M$ stets der nach außen gerichtete Normalenvektor zur Oberfläche ∂M am Punkt x.

Aufgabe 11.4 Der Staat Colorado erstreckt sich von 102° bis 109° westlicher Länge sowie von 37° bis 41° nördlicher Breite. Berechnen Sie die Fläche von Colorado, wobei die Erde als Kugel mit Radius $R = 6\,370$ km angenommen werde.

Hinweis: Überlegen Sie sich, wie die Position von Colorado bezüglich Kugelkoordinaten beschreibbar ist.

Abgabetermin: Freitag 2. Juli 2010, vor 10:00 Uhr in die Briefkästen bei F411.