Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Robert Denk
Mario Kaip

2. Juli 2010

Analysis II
12. Übungsblatt

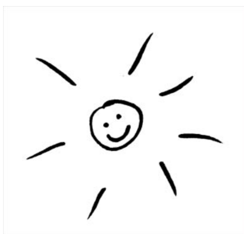
Aufgabe 12.1 Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $V \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Zeigen Sie nun die folgenden zwei Aussagen:

(i) Für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$ gilt
$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\lambda(B(\xi,\varepsilon))} \int_{B(\xi,\varepsilon)} f(x)dx = f(\xi).$$

(ii) Ist $\nu_\varepsilon(x)$ der nach außen gerichtete Normalenvektor zum Punkt $x \in \partial B(\xi,\varepsilon)$, so gilt für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$
$$\operatorname{div} V(\xi) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\lambda(B(\xi,\varepsilon))} \int_{\partial B(\xi,\varepsilon)} \langle V(x), \nu_\varepsilon(x) \rangle \, dA(x).$$

Aufgabe 12.2 Beweisen Sie den Gaußschen Integralsatz (Satz 4.69) für das nicht-glatte Gebiet
$$G := (0,1) \times (0,1) \times (0,1) \subset \mathbb{R}^3.$$

Aufgabe 12.3 Sei $V(x) := (x_2, x_3, x_1)^{\mathrm{T}}$ $(x \in \mathbb{R}^3)$ und
$$G := \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 < 1, \quad x_3 = x_1^2 - x_2^2\}.$$
Zeigen Sie, dass
$$\int_G \langle \operatorname{rot} V(x), \nu(x) \rangle \, dA(x) = \int_{\partial G} \langle V(x), dx \rangle \, ds$$
gilt, indem sie beide Integrale berechnen.



Das Analysis II Team wünscht Ihnen allen eine entspannte und sonnige vorlesungsfreie Zeit!

Abgabetermin: Freitag 9. Juli 2010, vor 10:00 Uhr in die Briefkästen bei F411.