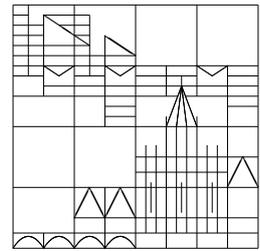


22. Oktober 2010



## Analysis III 1. Übungsblatt

**Aufgabe 1.1** Seien  $f, g \in C([-1, 1])$  mit  $g(t) > 0$  für alle  $t \in [-1, 1]$ . Zeigen Sie ausschließlich unter Verwendung von Mitteln aus AI/AII, dass die nachstehenden Differentialgleichungen jeweils genau eine Lösung  $u \in C^1([-1, 1])$  mit  $u(0) = 1$  besitzen.

(i)  $\frac{u'(t)}{u(t)^2} = t$

(ii)  $\cos(t)u'(t) - \sin(t)u(t) = \tan(t)^2 + 1$

(iii)  $g(u(t))u'(t) = f(t)$

### Aufgabe 1.2

(i) Sind die folgenden Differentialgleichungen linear oder nichtlinear, autonom oder nicht autonom?

(a)  $x'' = x^2 + t^2$       (b)  $(x' + x^2)^3 = 1$       (c)  $\begin{matrix} x_1' & = & x_2 \\ x_2' & = & -x_1 \end{matrix}$

(d)  $x = x''$       (e)  $\exp(x') + \sin(x) = 2$

(f)  $x'(t) \cos(t) + x''(t) \exp(t) + x(t) \sin(t) = \cosh(t)$

(ii) Gibt es unter diesen Gleichungen zwei, welche zueinander äquivalent sind?

(iii) Welche dieser Gleichungen sind implizit? Formen Sie sie in äquivalente explizite um.

**Aufgabe 1.3** Sei  $(X, d)$  ein vollständiger metrischer Raum und  $T : X \rightarrow X$  eine Abbildung.

(i) Zeigen Sie: Ist  $T^m := \underbrace{T \circ \dots \circ T}_{m\text{-Mal}}$  für ein  $m \in \mathbb{N}$  kontrahierend, so besitzt  $T$  genau einen Fixpunkt.

(ii) Muss  $T$  kontrahierend sein, wenn  $T^m$  für ein  $m \in \mathbb{N}$  kontrahierend ist?

**Aufgabe 1.4** Ein kugelförmiger Schneeball vermindere beim Schmelzen im Laufe der Zeit  $t$  sein Volumen  $V(t)$  mit einer Geschwindigkeit, die seiner jeweiligen Oberfläche  $F(t)$  proportional ist. Stellen Sie eine Differentialgleichung für seinen Radius  $r(t)$  als Funktion der Zeit auf. Bestimmen Sie mit Hilfe dieser Differentialgleichung eine Formel, die den Zusammenhang zwischen der Schmelzdauer  $T$  mit  $r(T) = 0$  und dem anfänglichen Radius  $r_0 = r(0)$  des Schneeballs angibt.