Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Robert Denk
Mario Kaip

22. Oktober 2010

Analysis III
1. Übungsblatt

Aufgabe 1.1 Seien $f, g \in C([-1,1])$ mit $g(t) > 0$ für alle $t \in [-1,1]$.
Zeigen Sie ausschließlich unter Verwendung von Mitteln aus AI/AII, dass die nachstehenden Differentialgleichungen jeweils genau eine Lösung $u \in C^1([-1,1])$ mit $u(0) = 1$ besitzen.

(i) $\dfrac{u'(t)}{u(t)^2} = t$

(ii) $\cos(t)u'(t) - \sin(t)u(t) = \tan(t)^2 + 1$

(iii) $g\big(u(t)\big)u'(t) = f(t)$

Aufgabe 1.2

(i) Sind die folgenden Differentialgleichungen linear oder nichtlinear, autonom oder nicht autonom?

$(a)\quad x'' = x^2 + t^2$ $\qquad (b)\quad (x' + x^2)^3 = 1$ $\qquad (c)\quad \begin{array}{rcl} x_1' &=& x_2 \\ x_2' &=& -x_1 \end{array}$

$(d)\quad x = x''$ $\qquad (e)\quad \exp(x') + \sin(x) = 2$

$(f)\quad x'(t)\cos(t) + x''(t)\exp(t) + x(t)\sin(t) = \cosh(t)$

(ii) Gibt es unter diesen Gleichungen zwei, welche zueinander äquivalent sind?

(iii) Welche dieser Gleichungen sind implizit? Formen Sie sie in äquivalente explizite um.

Aufgabe 1.3 Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und $T : X \to X$ eine Abbildung.

(i) Zeigen Sie: Ist $T^m := \underbrace{T \circ \ldots \circ T}_{m\text{-Mal}}$ für ein $m \in \mathbb{N}$ kontrahierend, so besitzt T genau einen Fixpunkt.

(ii) Muss T kontrahierend sein, wenn T^m für ein $m \in \mathbb{N}$ kontrahierend ist?

Aufgabe 1.4 Ein kugelförmiger Schneeball vermindere beim Schmelzen im Laufe der Zeit t sein Volumen $V(t)$ mit einer Geschwindigkeit, die seiner jeweiligen Oberfläche $F(t)$ proportional ist. Stellen Sie eine Differentialgleichung für seinen Radius $r(t)$ als Funktion der Zeit auf. Bestimmen Sie mit Hilfe dieser Differentialgleichung eine Formel, die den Zusammenhang zwischen der Schmelzdauer T mit $r(T) = 0$ und dem anfänglichen Radius $r_0 = r(0)$ des Schneeballs angibt.

Abgabetermin: Freitag 29. Oktober 2010, vor 10:00 Uhr in die Briefkästen bei F411.