Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Robert Denk
Mario Kaip

29. Oktober 2010

Analysis III
2. Übungsblatt

Aufgabe 2.1 Begründen Sie die Lösbarkeit des Anfangswertproblems

$$u'(t) = 2t(1 + u(t)), \quad u(0) = 0$$

und lösen Sie es mit Hilfe des Picardschen Iterationsverfahrens (vgl. Bemerkung 1.7).

Aufgabe 2.2 $P_1 < P_2 < P_3$ seien reelle Konstanten. Zeigen Sie: Für jede Funktion $P \in C^1([0,\infty),\mathbb{R})$ mit

$$P'(t) = -(P(t) - P_1)(P(t) - P_2)(P(t) - P_3)$$

existiert der Grenzwert $\lim_{t\to\infty} P(t)$ und es gilt

$$\lim_{t\to\infty} P(t) \quad \in \quad \{P_1, P_2, P_3\}.$$

Aufgabe 2.3 Geben Sie alle Lösungen der folgenden Differentialgleichung an und skizzieren Sie einige dieser Lösungen. Geben Sie insbesondere zu jeder Lösung an auf welchem Intervall sie die Differentialgleichung löst!

(i) $x'(t) = \exp(t - x(t))$

(ii) $x'(t) = \frac{2}{t}\sqrt{x(t)}, \quad x(t) > 0.$

Aufgabe 2.4 Es seien $f : (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ und $y_0 > 0$. Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem

$$y'(t) = f\big(y(t)\big),\ y(0) = y_0$$

in $[0, \frac{1}{2}]$ eine Lösung besitzt und diese eindeutig ist. Was lässt sich über das maximale Existenzintervall sagen?

Hinweis: Verwenden Sie Satz 1.15.

Abgabetermin: Freitag 5. November 2010, vor 10:00 Uhr in die Briefkästen bei F411.