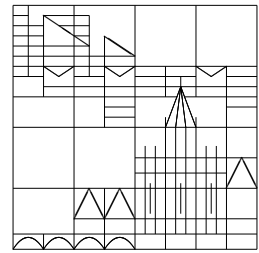


29. Oktober 2010



Analysis III 2. Übungsblatt

Aufgabe 2.1 Begründen Sie die Lösbarkeit des Anfangswertproblems

$$u'(t) = 2t(1 + u(t)), \quad u(0) = 0$$

und lösen Sie es mit Hilfe des Picardschen Iterationsverfahrens (vgl. Bemerkung 1.7).

Aufgabe 2.2 $P_1 < P_2 < P_3$ seien reelle Konstanten. Zeigen Sie: Für jede Funktion $P \in C^1([0, \infty), \mathbb{R})$ mit

$$P'(t) = -(P(t) - P_1)(P(t) - P_2)(P(t) - P_3)$$

existiert der Grenzwert $\lim_{t \rightarrow \infty} P(t)$ und es gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(t) \in \{P_1, P_2, P_3\}.$$

Aufgabe 2.3 Geben Sie alle Lösungen der folgenden Differentialgleichung an und skizzieren Sie einige dieser Lösungen. Geben Sie insbesondere zu jeder Lösung an auf welchem Intervall sie die Differentialgleichung löst!

- (i) $x'(t) = \exp(t - x(t))$
- (ii) $x'(t) = \frac{2}{t}\sqrt{x(t)}, \quad x(t) > 0.$

Aufgabe 2.4 Es seien $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ und $y_0 > 0$. Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem

$$y'(t) = f(y(t)), \quad y(0) = y_0$$

in $[0, \frac{1}{2}]$ eine Lösung besitzt und diese eindeutig ist. Was lässt sich über das maximale Existenzintervall sagen?

HINWEIS: Verwenden Sie Satz 1.15.