



12. November 2010

Analysis III 4. Übungsblatt

Aufgabe 4.1 Seien $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Zeige Sie die folgenden Aussagen:

- (i) Es konvergiert $e^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$ absolut bezüglich der Operatornorm $\|A\| := \max_{|x|=1} |Ax|$.
- (ii) Falls $AB = BA$ gilt, so folgt $e^{A+B} = e^A e^B$.
- (iii) Ist B invertierbar, so gilt $B^{-1} e^A B = e^{B^{-1} A B}$.
- (iv) Wenn A hermitesch ist, dann ist e^{iA} unitär.
- (v) Die Abbildung $t \mapsto e^{tA}$ ist beliebig oft differenzierbar mit

$$\frac{d}{dt} e^{tA} = A e^{tA} = e^{tA} A.$$

Aufgabe 4.2 Berechnen Sie die beiden Matrizen

$$(i) \quad \exp \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}, \quad x, y \in \mathbb{R} \qquad (ii) \quad \exp \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

Aufgabe 4.3 Geben Sie den gesamten Lösungsraum der folgenden Differentialgleichung an:

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 8 & -3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2t \\ 2t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

HINWEIS: Zum Auffinden einer speziellen Lösung sollten Sie den Ansatz $(x(t), y(t), z(t))^T = a + bt$ machen.

Aufgabe 4.4 Bei einer chemischen Reaktion reagieren je ein Molekül der Stoffe A und B zu einem neuem Molekül des Stoffes C . Zum Zeitpunkt $t = 0$ liegt Stoff A und B mit einer Anfangskonzentration von $\alpha > 0$ und $\beta > 0$ vor. Der Wert $\gamma(t) \leq \alpha, \beta$ beschreibt die Konzentration des Stoffes C zum Zeitpunkt t . Der zeitliche Verlauf von γ wird durch die Differentialgleichung

$$\gamma'(t) = r(\alpha - \gamma(t))(\beta - \gamma(t)), \quad t \geq 0, \quad \gamma(0) = 0 \quad (\text{Massenwirkungsgesetz})$$

mir $r > 0$ (Reaktionskonstante) modelliert. Berechnen Sie die Funktion γ und machen Sie eine Aussage zur zeitlichen Entwicklung (d.h. untersuchen Sie $\lim_{t \rightarrow \infty} \gamma(t)$). Sehen Sie Parallelen zu vergangenen Aufgaben?

HINWEIS: Lassen Sie sich nicht von der 'Chemie' in der Aufgabe abschrecken!