Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Robert Denk
Mario Kaip

19. November 2010

Analysis III
5. Übungsblatt

Aufgabe 5.1 Sei $A \in C([0,\infty),\mathbb{R}^{n\times n})$, $b \in C([0,\infty],\mathbb{R}^n)$ und sei $Y\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Fundamentalmatrix des zu

$$x'(t) = A(t)x(t) + b(t)$$

gehörigen homogenen Systems. Weiter gebe es ein $K > 0$ mit

$$\|Y(t)Y(s)^{-1}\| \le K \quad \text{für alle } 0 \le s \le t.$$

Zeigen Sie nun: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ so, dass für zwei Lösungen $x, y \in C^1([0,\infty),\mathbb{R}^n)$ der inhomogenen Gleichung, für die ein $t_0 \ge 0$ existiert mit $|x(t_0) - y(t_0)| < \delta$, stets folgt

$$\sup_{t\ge t_0} |x(t) - y(t)| < \varepsilon.$$

Aufgabe 5.2 Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beschränkt und differenzierbar. Zeigen Sie, dass jede Funktion $y \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, die

$$y'(t) = f(y(t))$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ erfüllt, schon monoton ist (wachsend oder fallend).

Aufgabe 5.3 Sei $\omega > 0$. Betrachte das System von Differentialgleichungen

$$y'(t) = A(t)y(t), \tag{1}$$

wobei $A \in C(\mathbb{R};\mathbb{C}^{n\times n})$ ω-periodisch sei, d. h. es gelte $A(t+\omega) = A(t)$ für $t \in \mathbb{R}$.

(i) Sei $Y \in C^1(\mathbb{R};\mathbb{C}^{n\times n})$ ein Fundamentalsystem von (1). Zeigen Sie, dass ein $B_Y \in \mathbb{C}^{n\times n}$ existiert mit $Y(t+\omega) = Y(t)B_Y$ für $t \in \mathbb{R}$.

(ii) Sei μ ein Eigenwert von B_Y. Zeigen Sie, dass dann eine Lösung z von (1) existiert mit $z(t+k\omega) = \mu^k z(t)$ für $t \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}_0$.

(iii) Zeigen Sie, dass die Eigenwerte von B_Y nicht von der Wahl von Y abhängen.

Aufgabe 5.4 Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y''(t) - y'(t) + y(t) = t\cos t, \quad t \ge 0$$

und finden Sie diejenigen Lösungen, für welche

$$\lim_{t\to\infty} \frac{y(t)}{t^2} = 0$$

gilt.

Hinweis: Der Rechenaufwand kann minimiert werden, wenn Sie versuchen eine partikulären Lösung ohne 'Variation der Konstanten' zu ermitteln.

Abgabetermin: Freitag 26. November 2010, vor 10:00 Uhr in die Briefkästen bei F411.