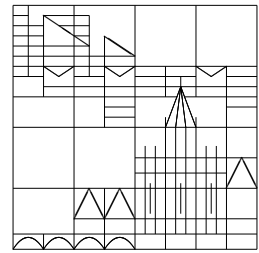


26. November 2010



### Analysis III 6. Übungsblatt

**Aufgabe 6.1** Untersuchen Sie die folgenden Randwertprobleme auf Lösbarkeit und berechnen Sie gegebenenfalls die Lösungen.

- (i)  $y''(t) + y(t) = 0$  für  $t \in [0, \pi]$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y(\pi) = 1$ .
- (ii)  $y''(t) + y(t) = 0$  für  $t \in [0, \pi]$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y(\pi) = -1$ .
- (iii)  $y''(t) + t^2 = 0$  für  $t \in [0, 1]$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(1) = 0$ .

**Aufgabe 6.2** Seien  $A : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n}$  und  $b : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}^n$  jeweils stetig. Zeigen Sie nun:

- (i) Gibt es eine asymptotisch stabile Lösung des inhomogenen Systems  $x'(t) = A(t)x(t) + b(t)$ , so ist die Nullfunktion asymptotisch stabile Lösung des zugehörigen homogenen Systems.
- (ii) Ist die Nullfunktion asymptotisch stabile Lösung des homogenen Systems, so konvergiert jede Lösung des homogenen Systems gegen Null für  $t \rightarrow \infty$  und jede Lösung des inhomogenen Systems ist asymptotisch stabil.

**Aufgabe 6.3** Es sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig mit  $f(r)r > 0$  für alle  $r \neq 0$ . Zeige Sie, dass die „gedämpfte“ Schwingungsgleichung

$$y''(t) + f(y'(t)) + y(t) = 0$$

keine nichttriviale periodische Lösung besitzt.

**Aufgabe 6.4** Zeigen Sie, dass es keine Funktion  $x \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  mit

(1) 
$$x' = 1 + x^4$$

geben kann. Vergleichen Sie hierzu Lösungen von (1) mit Lösungen der Differentialgleichung  $u' = 1 + u^2$ .