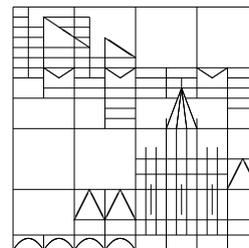


3. Dezember 2010



Analysis III 7. Übungsblatt

Aufgabe 7.1 Lösen Sie die folgenden Randwertprobleme mit Hilfe der Greenschen Funktion:

- (i) $-\eta''(x) + \eta(x) = x$, $x \in [0, 1]$, $\eta(0) = 0$, $\eta(1) = 2$,
- (ii) $x\eta''(x) + \eta'(x) = \pi$, $x \in [1, 2]$, $\eta'(1) = 0$, $\eta(2) = 0$.

Aufgabe 7.2 Das homogene Randwertproblem $Lx = 0$, $R_i x = 0$ (Bezeichnungen wie in Kap. 5 d)) besitze nur die triviale Lösung (d.h. $\lambda = 0$ ist kein Eigenwert von A). Sei G die zugehörige GREENSche Funktion. Beweisen Sie (vgl. Lemma 5.15):

- (i) Der Operator $A: D(A) \rightarrow C([a, b]; \mathbb{C})$ ist bijektiv, und somit ist der inverse Operator $M := A^{-1}: C([a, b]; \mathbb{C}) \rightarrow C([a, b]; \mathbb{C})$ wohldefiniert.
- (ii) Es gilt $(Mf)(t) = \int_a^b G(t, s)f(s) ds$ für $f \in C([a, b]; \mathbb{C})$.
- (iii) Der Operator M ist symmetrisch.
- (iv) Eine Zahl $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist genau dann Eigenwert von M , falls $\frac{1}{\mu}$ Eigenwert von A ist.
- (v) Für alle $f \in C([a, b]; \mathbb{C})$ ist $\langle Mf, f \rangle \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 7.3

- (a) Geben Sie jeweils die σ -Algebra $\sigma(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ an, welche durch die folgenden Mengensysteme erzeugt wird:
 - (i) $\Omega := \mathbb{R}$, $\mathcal{E} := \{\{x\} : x \in \mathbb{R}\}$,
 - (ii) $\Omega := \mathbb{Z}$, $\mathcal{E} := \{\{-n, n\} : n \in \mathbb{N}_0\}$,
 - (iii) $\Omega := \mathbb{R}$, $\mathcal{E} := \mathcal{P}(\mathbb{Q})$,
 - (iv) $\Omega := \{1, 2, 3, 4\}$, $\mathcal{E} := \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}\}$
- (b) Geben Sie zwei σ -Algebren \mathcal{A} und \mathcal{B} auf der Menge $\Omega := \{1, 2, 3, 4\}$ so an, dass $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ keine σ -Algebra ist.

Aufgabe 7.4 Es sei Ω eine endliche, nicht leere Menge. Für jede Teilmenge $A \subset \Omega$ sei $\zeta(A) := \#A$ (Zählmaß). Zeigen Sie:

- (i) Es gilt $\zeta = \sum_{\omega \in \Omega} \delta_{\{\omega\}}$ mit

$$\delta_{\{\omega\}}(A) := \begin{cases} 1, & \text{falls } \omega \in A \\ 0, & \text{falls } \omega \notin A \end{cases}$$

- (ii) Jedes Maß μ auf $\mathcal{P}(\Omega)$ hat schon die Form

$$\mu = \sum_{\omega \in \Omega} \alpha_{\omega} \delta_{\{\omega\}}$$

für gewisse $\alpha_{\omega} \geq 0$.