Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Robert Denk
Mario Kaip

3. Dezember 2010

Analysis III
7. Übungsblatt

Aufgabe 7.1 Lösen Sie die folgenden Randwertprobleme mit Hilfe der Greenschen Funktion:

(i) $-\eta''(x) + \eta(x) = x$, $x \in [0,1]$, $\eta(0) = 0$, $\eta(1) = 2$,

(ii) $x\eta''(x) + \eta'(x) = \pi$, $x \in [1,2]$, $\eta'(1) = 0$, $\eta(2) = 0$.

Aufgabe 7.2 Das homogene Randwertproblem $Lx = 0$, $R_i x = 0$ (Bezeichnungen wie in Kap. 5 d)) besitze nur die triviale Lösung (d.h. $\lambda = 0$ ist kein Eigenwert von A). Sei G die zugehörige Greensche Funktion. Beweisen Sie (vgl. Lemma 5.15):

(i) Der Operator $A\colon D(A) \longrightarrow C\big([a,b];\mathbb{C}\big)$ ist bijektiv, und somit ist der inverse Operator $M := A^{-1}\colon C\big([a,b];\mathbb{C}\big) \longrightarrow C\big([a,b];\mathbb{C}\big)$ wohldefiniert.

(ii) Es gilt $(Mf)(t) = \int_a^b G(t,s)f(s)\,ds$ für $f \in C\big([a,b];\mathbb{C}\big)$.

(iii) Der Operator M ist symmetrisch.

(iv) Eine Zahl $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist genau dann Eigenwert von M, falls $\frac{1}{\mu}$ Eigenwert von A ist.

(v) Für alle $f \in C\big([a,b];\mathbb{C}\big)$ ist $\langle Mf, f\rangle \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 7.3

(a) Geben Sie jeweils die σ-Algebra $\sigma(\mathscr{E}) \subseteq \mathscr{P}(\Omega)$ an, welche durch die folgenden Mengensysteme erzeugt wird:

  (i) $\Omega := \mathbb{R}$, $\mathscr{E} := \{\{x\} : x \in \mathbb{R}\}$,
  (ii) $\Omega := \mathbb{Z}$, $\mathscr{E} := \{\{-n, n\} : n \in \mathbb{N}_0\}$,
  (iii) $\Omega := \mathbb{R}$, $\mathscr{E} := \mathscr{P}(\mathbb{Q})$,
  (iv) $\Omega := \{1,2,3,4\}$, $\mathscr{E} := \{\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\}\}$

(b) Geben Sie zwei σ-Algebren $\mathscr{A}$ und $\mathscr{B}$ auf der Menge $\Omega := \{1,2,3,4\}$ so an, dass $\mathscr{A} \cup \mathscr{B}$ keine σ-Algebra ist.

Aufgabe 7.4 Es sei Ω eine endliche, nicht leere Menge. Für jede Teilmenge $A \subset \Omega$ sei $\zeta(A) := \#A$ (Zählmaß). Zeigen Sie:

(i) Es gilt $\zeta = \sum_{\omega\in\Omega} \delta_{\{\omega\}}$ mit

$$\delta_{\{\omega\}}(A) := \begin{cases} 1, & \text{falls } \omega \in A \\ 0, & \text{falls } \omega \notin A \end{cases}$$

(ii) Jedes Maß μ auf $\mathscr{P}(\Omega)$ hat schon die Form

$$\mu = \sum_{\omega\in\Omega} \alpha_\omega \delta_{\{\omega\}}$$

für gewisse $\alpha_\omega \geq 0$.