Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Robert Denk
Mario Kaip

17. Dezember 2010

Analysis III
9. Übungsblatt

Definition 9.1 *Sei $X \neq \emptyset$ und $A_n \subset X$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann definiert man*

$$\liminf_{n\to\infty} A_n := \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\geq m} A_n, \quad \limsup_{n\to\infty} A_n := \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geq m} A_n.$$

Die Mengenfolge $(A_n)_n$ heißt konvergent, wenn $\liminf_{n\to\infty} A_n = \limsup_{n\to\infty} A_n$ gilt. Man schreibt dann auch

$$\lim_{n\to\infty} A_n := \liminf_{n\to\infty} A_n.$$

Aufgabe 9.1 Sei μ ein endlicher, σ-additiver Inhalt auf einer Algebra $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(X)$. Zeigen Sie nun

$$\overline{\sigma}(\mathscr{A}) \subset \{B \in \mathscr{P}(X) : \text{Für alle } \varepsilon > 0 \text{ existiert ein } A \in \mathscr{A} \text{ mit } d_{\mu^*}(A,B) < \varepsilon\}$$

(vgl. Bemerkung 1.15).

Aufgabe 9.2 Sei $X \neq \emptyset$ und $(A_n)_n \subset \mathscr{P}(X)$. Außerdem sei ν ein σ-additiver Inhalt auf einem Ring $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(X)$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Es gilt $\liminf_{n\to\infty} A_n \subset \limsup_{n\to\infty} A_n$.

(ii) Ist $(A_n)_n \subset \mathscr{A}$ mit $A_n \subset A_{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$ und $A := \lim_{n\to\infty} A_n \in \mathscr{A}$, so gilt

$$\nu\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \nu(A_n).$$

(iii) Ist $(A_n)_n \subset \mathscr{A}$ mit $A_{n+1} \subset A_n$ $(n \in \mathbb{N})$, $A := \lim_{n\to\infty} A_n \in \mathscr{A}$ und $\nu(A_{n_0}) < \infty$ für ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so gilt

$$\nu\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \nu(A_n).$$

Aufgabe 9.3 Sei $\alpha \in [0,1)$ und $E \subset \mathbb{R}$ eine Lebesgue-messbare und beschränkte Menge mit $\lambda(E) > 0$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Es existiert eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}$ mit $E \subset U$ und $\alpha \cdot \lambda(U) \leq \lambda(E)$.

(ii) Es existiert ein offenes Intervall $I \subset \mathbb{R}$ mit $\alpha \cdot \lambda(I) \leq \lambda(E \cap I)$.

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass für jede offene Menge $U \subset \mathbb{R}$ eine Folge $(I_n)_n$ paarweiser disjunkter offener Intervalle existiert mit $U = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$.

Aufgabe 9.4 Sei $E \subset \mathbb{R}$ eine Lebesgue-messbare und beschränkte Menge mit $\lambda(E) > 0$. Zeigen Sie mit Hilfe von Aufgabe 9.3 (ii) (wählen Sie z.B. $\alpha = 3/4$), dass ein $b > 0$ existiert mit

$$(-b,b) \subset E - E := \{x - y : x, y \in E\}.$$

Abgabetermin: Montag 10. Januar 2011, vor 10:00 Uhr in die Briefkästen bei F411.