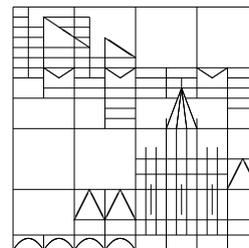


17. Dezember 2010



Analysis III 9. Übungsblatt

Definition 9.1 Sei $X \neq \emptyset$ und $A_n \subset X$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann definiert man

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n := \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq m} A_n, \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n := \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \geq m} A_n.$$

Die Mengenfolge $(A_n)_n$ heißt konvergent, wenn $\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$ gilt. Man schreibt dann auch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n := \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n.$$

Aufgabe 9.1 Sei μ ein endlicher, σ -additiver Inhalt auf einer Algebra $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$. Zeigen Sie nun

$$\bar{\sigma}(\mathcal{A}) \subset \{B \in \mathcal{P}(X) : \text{Für alle } \varepsilon > 0 \text{ existiert ein } A \in \mathcal{A} \text{ mit } d_{\mu^*}(A, B) < \varepsilon\}$$

(vgl. Bemerkung 1.15).

Aufgabe 9.2 Sei $X \neq \emptyset$ und $(A_n)_n \subset \mathcal{P}(X)$. Außerdem sei ν ein σ -additiver Inhalt auf einem Ring $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Es gilt $\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n \subset \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$.

(ii) Ist $(A_n)_n \subset \mathcal{A}$ mit $A_n \subset A_{n+1}$ ($n \in \mathbb{N}$) und $A := \lim_{n \rightarrow \infty} A_n \in \mathcal{A}$, so gilt

$$\nu \left(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \nu(A_n).$$

(iii) Ist $(A_n)_n \subset \mathcal{A}$ mit $A_{n+1} \subset A_n$ ($n \in \mathbb{N}$), $A := \lim_{n \rightarrow \infty} A_n \in \mathcal{A}$ und $\nu(A_{n_0}) < \infty$ für ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so gilt

$$\nu \left(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \nu(A_n).$$

Aufgabe 9.3 Sei $\alpha \in [0, 1)$ und $E \subset \mathbb{R}$ eine Lebesgue-messbare und beschränkte Menge mit $\lambda(E) > 0$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Es existiert eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}$ mit $E \subset U$ und $\alpha \cdot \lambda(U) \leq \lambda(E)$.

(ii) Es existiert ein offenes Intervall $I \subset \mathbb{R}$ mit $\alpha \cdot \lambda(I) \leq \lambda(E \cap I)$.

HINWEIS: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass für jede offene Menge $U \subset \mathbb{R}$ eine Folge $(I_n)_n$ paarweiser disjunkter offener Intervalle existiert mit $U = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$.

Aufgabe 9.4 Sei $E \subset \mathbb{R}$ eine Lebesgue-messbare und beschränkte Menge mit $\lambda(E) > 0$. Zeigen Sie mit Hilfe von Aufgabe 9.3 (ii) (wählen Sie z.B. $\alpha = 3/4$), dass ein $b > 0$ existiert mit

$$(-b, b) \subset E - E := \{x - y : x, y \in E\}.$$