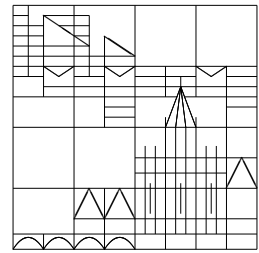


14. Januar 2011



## Analysis III 10. Übungsblatt

**Aufgabe 10.1** Sei  $\Lambda$  eine beliebige Menge und  $(U_\kappa)_{\kappa \in \Lambda}$  eine Familie offener Mengen in  $\mathbb{R}$  mit  $U_\kappa \neq \emptyset$  ( $\kappa \in \Lambda$ ) und  $U_\kappa \cap U_\mu = \emptyset$  für  $\kappa \neq \mu$ . Zeigen oder widerlegen Sie nun die folgenden Aussagen:

- (i) Ist  $I \subset \mathbb{R}$  ein beschränktes Intervall mit  $U_\kappa \subset I$  für alle  $\kappa \in \Lambda$ , so ist  $\Lambda$  schon abzählbar.
- (ii) Ist  $U \subset \mathbb{R}$  eine beliebige Menge mit  $U_\kappa \subset U$  für alle  $\kappa \in \Lambda$ , so ist  $\Lambda$  schon abzählbar.

**Aufgabe 10.2** Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum und  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion so, dass für alle  $x \in X$  und jede Folge  $(x_n)_n \subset X$  mit  $x_n \rightarrow x$  ( $n \rightarrow \infty$ ) schon

$$f(x) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$$

gilt. Zeigen Sie nun, dass  $f$  Borel-messbar ist.

HINWEIS: Nehmen Sie zunächst an, dass  $f(X)$  beschränkt ist (z.B.  $f(X) \subset (0, \pi)$ ) und betrachten Sie dazu die Funktionen  $f_n : X \rightarrow (0, \infty)$ ,  $x \mapsto \inf\{f(z) + n \cdot d(x, z) : z \in X\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

**Aufgabe 10.3** Auf dem Intervall  $[-1, 1]$  definiert man die Äquivalenzrelation

$$x \sim y : \iff x - y \in \mathbb{Q}.$$

Zeigen Sie: Ist  $R \subset [-1, 1]$  ein Repräsentantensystem von  $\sim$ , so ist  $R$  nicht Lebesgue-messbar.

HINWEIS: Hier bietet sich ein indirekter Beweis unter Verwendung von Aufgabe 9.4 an.

**Aufgabe 10.4** Sei  $m, n \in \mathbb{N}$  mit  $m \geq n$  und  $M \subset \mathbb{R}^n$  eine Lebesgue-messbare Menge mit  $\lambda(M) = 0$ . Zudem sei  $f : M \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine Lipschitz-stetige Funktion.

- (i) Zeigen Sie, dass  $f(M)$  auch Lebesgue-messbar ist und  $\lambda(f(M)) = 0$  gilt.
- (ii) Zeigen Sie, dass im Falle von  $m < n$  die Aussage von (i) im Allgemeinen nicht mehr gilt.

HINWEIS: Zu (i): Verwenden Sie, dass  $\lambda$  vom elementargeometrischen Inhalt erzeugt wird. Zu (ii): Verwenden Sie Aufgabe 10.3.