Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Robert Denk
Mario Kaip

14. Januar 2011

Analysis III
10. Übungsblatt

Aufgabe 10.1 Sei Λ eine beliebige Menge und $(U_\kappa)_{\kappa\in\Lambda}$ eine Familie offener Mengen in $\mathbb{R}$ mit $U_\kappa \neq \emptyset$ ($\kappa \in \Lambda$) und $U_\kappa \cap U_\mu = \emptyset$ für $\kappa \neq \mu$. Zeigen oder widerlegen Sie nun die folgenden Aussagen:

(i) Ist $I \subset \mathbb{R}$ ein beschränktes Intervall mit $U_\kappa \subset I$ für alle $\kappa \in \Lambda$, so ist Λ schon abzählbar.

(ii) Ist $U \subset \mathbb{R}$ eine beliebige Menge mit $U_\kappa \subset U$ für alle $\kappa \in \Lambda$, so ist Λ schon abzählbar.

Aufgabe 10.2 Sei (X, d) ein metrischer Raum und $f : X \to \mathbb{R}$ eine Funktion so, dass für alle $x \in X$ und jede Folge $(x_n)_n \subset X$ mit $x_n \to x$ $(n \to \infty)$ schon

$$f(x) \leq \liminf_{n\to\infty} f(x_n)$$

gilt. Zeigen Sie nun, dass f Borel-messbar ist.
Hinweis: Nehmen Sie zunächst an, dass $f(X)$ beschränkt ist (z.B. $f(X) \subset (0,\pi)$) und betrachten Sie dazu die Funktionen $f_n : X \to (0,\infty), x \mapsto \inf\{f(z) + n \cdot d(x,z) : z \in X\}$, $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 10.3 Auf dem Intervall $[-1, 1]$ definiert man die Äquivalenzrelation

$$x \sim y :\Longleftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}.$$

Zeigen Sie: Ist $R \subset [-1, 1]$ ein Repräsentantensystem von $\sim$, so ist R nicht Lebesgue-messbar.
Hinweis: Hier bietet sich ein indirekter Beweis unter Verwendung von Aufgabe 9.4 an.

Aufgabe 10.4 Sei $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \geq n$ und $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Lebesgue-messbare Menge mit $\lambda(M) = 0$. Zudem sei $f : M \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine Lipschitz-stetige Funktion.

(i) Zeigen Sie, dass $f(M)$ auch Lebesgue-messbar ist und $\lambda(f(M)) = 0$ gilt.

(ii) Zeigen Sie, dass im Falle von $m < n$ die Aussage von (i) im Allgemeinen nicht mehr gilt.

Hinweis: Zu (i): Verwenden Sie, dass λ vom elementargeometrischen Inhalt erzeugt wird. Zu (ii): Verwenden Sie Aufgabe 10.3.

Abgabetermin: Freitag 21. Januar 2011, vor 10:00 Uhr in die Briefkästen bei F411.