Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Robert Denk
Mario Kaip

21. Januar 2011

Analysis III
11. Übungsblatt

Aufgabe 11.1 Sei $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}) := \{g : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : \mathrm{Re}\,(g), \mathrm{Im}\,(g) \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})\}$ und $k \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie: Definiert man

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \quad t \mapsto \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x)}{(1+|x|)^k} \exp(itx)dx,$$

so ist g wohldefiniert und es gilt bereits $g \in C^k(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Aufgabe 11.2 Finden Sie Intervalle $I_1, I_2 \subset \mathbb{R}$ und eine stetige Funktion $f : I_1 \times I_2 \to \mathbb{R}$ mit $[I_1 \ni x \mapsto \int_{I_2} f(x,y)dy] \in \mathscr{L}^1(I_1)$, $[I_2 \ni y \mapsto \int_{I_1} f(x,y)dx] \in \mathscr{L}^1(I_2)$ und

$$\int_{I_1} \left(\int_{I_2} f(x,y)dy \right) dx \neq \int_{I_2} \left(\int_{I_1} f(x,y)dx \right) dy.$$

Zeigen Sie, dass in dieser Situation schon $f \notin \mathscr{L}^1(I_1 \times I_2)$ gilt.
Hinweis: Suchen Sie eine Funktion derart, dass $\int_{I_1} \left(\int_{I_2} f(x,y)dy \right) dx < 0$ und $\int_{I_2} \left(\int_{I_1} f(x,y)dx \right) dy > 0$ gilt.

Aufgabe 11.3 Sei $(X, \mathscr{A}, \mu)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum (d.h. $\mu(X) = 1$) und $\mathscr{F}, \mathscr{G} \subset \mathscr{A}$ seien μ-unabhängige Teil-σ-Algebren von $\mathscr{A}$.

$$\mathscr{F} \text{ und } \mathscr{G} \text{ sind } \mu\text{-unabhängig} :\Leftrightarrow \forall A \in \mathscr{F}, B \in \mathscr{G} : \mu(A \cap B) = \mu(A) \cdot \mu(B).$$

Weiterhin sei $f : X \to \mathbb{R}$ $\mathscr{F}$-messbar und $g : X \to \mathbb{R}$ $\mathscr{G}$-messbar. Zeigen Sie nun:

(i) Die Funktionen f und g sind $\mathscr{A}$-messbar.

(ii) Gilt $f, g \in \mathscr{L}^1(\mu)$, so gilt auch $fg \in \mathscr{L}^1$ und

$$\left(\int_X f d\mu \right) \left(\int_X g d\mu \right) = \left(\int_X fg d\mu \right).$$

Aufgabe 11.4

(i) Seien $(X, \mathscr{A})$ und $(X_1, \mathscr{A}_1), \ldots, (X_n, \mathscr{A}_n)$ Messräume und $\mathscr{B} := \bigotimes_{i=1}^n \mathscr{A}_n$. Beweisen Sie, dass eine Abbildung $f : X \longrightarrow \prod_{i=1}^n X_i$ genau dann $(\mathscr{A} - \mathscr{B})$-messbar ist, wenn für alle $j \in \{1, \ldots, n\}$ die Funktion $\mathrm{pr}_j \circ f : X \longrightarrow X_j$ bereits $(\mathscr{A} - \mathscr{A}_j)$-messbar ist.

(ii) Sei $(X, \mathscr{A})$ ein Messraum und $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Abbildung. Zeigen Sie nun, dass f genau dann $(\mathscr{A} - \mathscr{B}(\mathbb{R}))$-messbar ist, falls

$$M := \{(s,t) \in X \times \mathbb{R} \,:\, t \leq f(s)\} \in \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R})$$

gilt.

Abgabetermin: Freitag 28. Januar 2011, vor 10:00 Uhr in die Briefkästen bei F411.