Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Robert Denk
Mario Kaip

28. Januar 2011

Analysis III
12. Übungsblatt

Aufgabe 12.1 Sei $\mathfrak{M}$ die Menge aller Maße auf dem Messraum $(X, \mathscr{A})$. Zeigen Sie nun:

(i) Definiert man für $\mu, \nu \in \mathfrak{M}$
$$\mu \sim \nu :\Leftrightarrow \mu \ll \nu \wedge \nu \ll \mu,$$
so ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathfrak{M}$.

(ii) Sind $\mu, \nu \in \mathfrak{M}$ endliche Maße mit $\mu \sim \nu$, so gilt
$$0 < \frac{d\nu}{d\mu} < \infty \ \mu\text{-f.ü.}.$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst bei (ii) , dass $0 < \frac{d\nu}{d\mu}$ (μ-f.ü.) und $0 < \frac{d\mu}{d\nu}$ (ν-f.ü.) gilt.

Aufgabe 12.2 Beweisen Sie mit Mitteln der Vorlesung
$$\lim_{t\to\infty} \int_0^t \frac{1}{x} \sin(x)\, dx = \frac{\pi}{2}.$$

Hinweis: Betrachten Sie das iterierte Integral $\int_0^t \int_0^\infty \sin(x) \cdot e^{-ux}\, du\, dx$.

Aufgabe 12.3 Man definiere die Funktion $g : (0,1] \to \mathbb{R}$ durch
$$g(x) := \frac{(-1)^n \cdot 2^n}{n}, \qquad \text{für } x \in \left(\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}\right], \quad n \in \mathbb{N}.$$

(i) Zeigen Sie $g \notin \mathscr{L}^1((0,1], \lambda)$.

(ii) Zeigen Sie, dass das uneigentliche Integral
$$\int_0^1 g(x)dx := \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_\varepsilon^1 g(x) d\lambda(x)$$
existiert.

Aufgabe 12.4 Sei $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein C^1-Diffeomorphismus und $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Lebesgue-messbare Menge. Zeigen Sie nun, dass $\Phi(M)$ auch Lebesgue-messbar ist.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass für M eine Lebesgue-Nullmenge N und $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ existieren mit $M = B \cup N$ und $B \cap N = \emptyset$ (Satz 1.23). Zeigen Sie dann unter Verwendung von Aufgabe 10.4, dass $\Phi(N)$ eine Lebesgue-Nullmenge ist.

Abgabetermin: Freitag 4. Februar 2011, vor 10:00 Uhr in die Briefkästen bei F411.