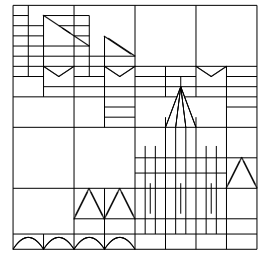


28. Januar 2011



## Analysis III 12. Übungsblatt

**Aufgabe 12.1** Sei  $\mathfrak{M}$  die Menge aller Maße auf dem Messraum  $(X, \mathcal{A})$ . Zeigen Sie nun:

(i) Definiert man für  $\mu, \nu \in \mathfrak{M}$

$$\mu \sim \nu := \Leftrightarrow \mu \ll \nu \wedge \nu \ll \mu,$$

so ist  $\sim$  eine Äquivalenzrelation auf  $\mathfrak{M}$ .

(ii) Sind  $\mu, \nu \in \mathfrak{M}$  endliche Maße mit  $\mu \sim \nu$ , so gilt

$$0 < \frac{d\nu}{d\mu} < \infty \quad \mu\text{-f.ü.}$$

HINWEIS: Zeigen Sie zunächst bei (ii), dass  $0 < \frac{d\nu}{d\mu}$  ( $\mu$ -f.ü.) und  $0 < \frac{d\mu}{d\nu}$  ( $\nu$ -f.ü.) gilt.

**Aufgabe 12.2** Beweisen Sie mit Mitteln der Vorlesung

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \frac{1}{x} \sin(x) dx = \frac{\pi}{2}.$$

HINWEIS: Betrachten Sie das iterierte Integral  $\int_0^t \int_0^\infty \sin(x) \cdot e^{-ux} du dx$ .

**Aufgabe 12.3** Man definiere die Funktion  $g : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$g(x) := \frac{(-1)^n \cdot 2^n}{n}, \quad \text{für } x \in \left( \frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}} \right], \quad n \in \mathbb{N}.$$

(i) Zeigen Sie  $g \notin \mathcal{L}^1((0, 1], \lambda)$ .

(ii) Zeigen Sie, dass das uneigentliche Integral

$$\int_0^1 g(x) dx := \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_\varepsilon^1 g(x) d\lambda(x)$$

existiert.

**Aufgabe 12.4** Sei  $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein  $C^1$ -Diffeomorphismus und  $M \subset \mathbb{R}^n$  eine Lebesgue-messbare Menge. Zeigen Sie nun, dass  $\Phi(M)$  auch Lebesgue-messbar ist.

HINWEIS: Zeigen Sie zunächst, dass für  $M$  eine Lebesgue-Nullmenge  $N$  und  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$  existieren mit  $M = B \cup N$  und  $B \cap N = \emptyset$  (Satz 1.23). Zeigen Sie dann unter Verwendung von Aufgabe 10.4, dass  $\Phi(N)$  eine Lebesgue-Nullmenge ist.