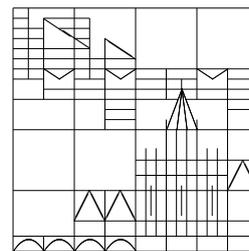


23. April 2009



## Funktionalanalysis 1. Übungsblatt

**Aufgabe 1.1** Für beliebige metrische Räume  $(X, d_X)$  und  $(Y, d_Y)$  zeige man:

- (i)  $(X, d_X)$  ist zu einem beschränkten metrischen Raum  $(X, d')$  homöomorph (vgl. dazu **1.15 Satz a**).

HINWEIS: Betrachten Sie:  $d'(x, y) := \frac{d_X(x, y)}{1 + d_X(x, y)}$ .

- (ii) Für jede Funktion  $f : X \rightarrow Y$  ist die Definition von Stetigkeit gemäß **Definition 1.1 b**) äquivalent zum  $\varepsilon$ - $\delta$ -Kriterium. Allgemein lautet das  $\varepsilon$ - $\delta$ -Kriterium auf metrischen Räumen:

$$\forall x_0 \in X \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in X : (d_X(x_0, x) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x_0), f(x)) < \varepsilon)$$

**Aufgabe 1.2** Sei  $(X, \mathcal{T})$  ein topologischer Raum und  $K_j \subset X$  kompakte Mengen ( $j \in \mathbb{N}$ ).

- (i) Zeigen Sie, dass für  $n \in \mathbb{N}$  auch  $K := \bigcup_{j=1}^n K_j$  kompakt ist.

- (ii) Zeigen Sie: Ist  $(X, \mathcal{T})$  sogar metrisierbar, so gilt  $\bigcap_{j=1}^{\infty} K_j \neq \emptyset$ , falls für alle  $n \in \mathbb{N}$  bereits  $\bigcap_{j=1}^n K_j \neq \emptyset$  gilt.

**Aufgabe 1.3** Sei  $X_i := \mathbb{R}$  für  $i \in \{1, 2\}$  und  $X := X_1 \times X_2$ , wobei  $X_i$  mit dem Betrag als topologischer Raum aufzufassen ist. Zudem sei  $\mathcal{T}_P$  die dadurch induzierte Produkttopologie auf  $X$  gemäß **1.1 Definition e**) und  $\mathcal{T}_e$  die durch die euklidische Norm induzierte Topologie auf  $X$ . Gilt nun  $\mathcal{T}_P = \mathcal{T}_e$ ? Begründen Sie ihre Antwort!

**Aufgabe 1.4** Sei  $(X_i, \mathcal{T}_i)$  ( $i \in I$ ) eine Familie von topologischen Räumen und  $X := \prod_{i \in I} X_i$  der zugehörige Produktraum. Sind dann die zugehörigen Projektionen

$$\text{pr}_j : X \rightarrow X_j, (x_i)_{i \in I} \mapsto x_j, \quad (j \in I)$$

abgeschlossene Abbildungen (d.h. für alle abgeschlossenen Mengen  $A \subset X$  ist auch  $\text{pr}_j(A) \subset X_j$  abgeschlossen)? Begründen Sie ihre Antwort!