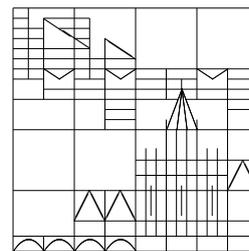


30. April 2009



Funktionalanalysis 2. Übungsblatt

Aufgabe 2.1 Seien $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normierte Räume und $N \subset X$ ein abgeschlossener Unterraum. Weiterhin sei $\pi : X \rightarrow X/N, x \mapsto [x]$, wobei X/N der Quotientenraum (**vgl. 2.8 Definition und Satz**) sei. Dazu sei eine lineare Abbildung $T : X \rightarrow Y$ gegeben mit $N \subset \ker T$. Zeigen Sie nun:

- (i) Es existiert genau eine Funktion $f : X/N \rightarrow Y$ mit $f \circ \pi = T$.
- (ii) f aus (i) ist linear und genau dann stetig, falls T stetig ist.

Aufgabe 2.2 Sei (X, \mathcal{T}) ein topologischer Raum und $Y \subset X$.

- (i) Zeige, dass Y mit

$$\mathcal{T}_{\text{Sp}} := \{U \cap Y : U \in \mathcal{T}\}$$

zu einem topologischen Raum wird. \mathcal{T}_{Sp} wird dann die Spurtopologie von X auf Y genannt. Finde weiterhin eine Familie F von Funktionen derart, dass \mathcal{T}_{Sp} gerade die F -schwache Topologie $\mathcal{T}(F)$ auf Y ist.

- (ii) Zeigen Sie, dass $K \subset Y$ in Y (bzgl. \mathcal{T}_{Sp}) genau dann kompakt ist, falls K in X (bzgl. \mathcal{T}) kompakt ist.

Aufgabe 2.3 Seien $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normierte Räume und $T : X \rightarrow Y$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen (**vgl. 2.5 Satz**):

- (i) T ist beschränkt (d.h. es existiert ein $C > 0$ mit $\|Tx\|_Y \leq C\|x\|_X$ für alle $x \in X$).
- (ii) T ist stetig.
- (iii) T ist stetig in $0 \in X$.

Aufgabe 2.4

- (i) Sei (X, \mathcal{T}) ein kompakter topologischer Raum und $K \subset X$ abgeschlossen. Zeigen Sie, dass K schon kompakt ist.
- (ii) Sei (X, \mathcal{T}_X) ein kompakter topologische Raum und (Y, d) ein metrischer Raum. Zeigen Sie, dass die Abbildung $\varphi : X \rightarrow Y$ bereits ein Homöomorphismus ist, falls sie bijektiv und stetig ist.