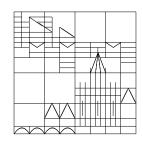
Universität Konstanz Fachbereich Mathematik und Statistik PROF. DR. ROBERT DENK DIPL.-MATH. MARIO KAIP

14. April 2009



Funktionalanalysis 4. Übungsblatt

Aufgabe 4.1 Sei $M \subset X$ ein abgeschlossener Untervektorraum des Hilbertraums $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Dann definiert man die *orthogonale Projektion P* durch

$$P: X \to M, x = m + m' \mapsto m.$$

wobei die Zerlegung x=m+m' $(m\in M,m'\in M^{\perp})$ gemäß **Satz 2.24** gegeben sei. Zeigen sie:

- (i) $P \in L(X, M)$ und $||P||_{L(X,M)} = 1$ (wie üblich $||x||_M := ||x||_X$, f.a. $x \in M$).
- (ii) $P^2 = P$ und $\langle Px, y \rangle = \langle x, Py \rangle$ für alle $x, y \in X$.
- (iii) Es gilt $\ker P = M^{\perp}$ und $\operatorname{Im} P = M$.

Aufgabe 4.2 Sei H ein Hilbertraum mit Orthonormalbasis $S := \{e_i : i \in I\}$ für eine beliebige Indexmenge I. Zudem sei $M := \{y_i : i \in I\}$ eine beliebige orthogonale und beschränkte Familie von Vektoren aus H. Zeigen Sie:

- (i) Die Reihe $\sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle y_i$ konvergiert unbedingt.
- (ii) Es existiert genau ein $T \in L(H)$ mit $Te_i = y_i$ für alle $i \in I$.

HINWEIS: Zu (i): Versuchen Sie den Beweis von 2.33 Satz a) zu modifizieren.

Zu (ii): Vergessen Sie nicht die Wohldefiniertheit von ${\cal T}$ zu begründen.

Aufgabe 4.3 Sei $F \in (\ell^1)'$ ein stetiges lineares Funktional auf ℓ^1 . Man zeige:

(i) Es existiert genau eine Folge $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\ell^{\infty}$, so dass

$$F\left((\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \eta_n$$

für alle $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\ell^1$ gilt. Insbesondere gilt dann auch $\|(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_{\infty}=\|F\|_{(\ell^1)'}$.

(ii) Für alle $\zeta := (\zeta_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^{\infty}$ gilt schon $F_{\zeta} \in (\ell^1)'$, wobei $F_{\zeta} : \ell^1 \to \mathbb{C}, (\xi_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \zeta_n$. Hinweis: Man zeige zunächst, dass $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}} = \lim_{N \to \infty} \sum_{k=1}^{N} \xi_k e_k$ in ℓ^1 gilt, wobei $e_k := (\delta_{kn})_{n \in \mathbb{N}}$.