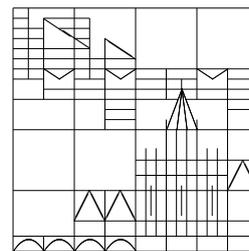


18. Juni 2009



## Funktionalanalysis 9. Übungsblatt

**Aufgabe 9.1** Seien  $X$  und  $Y$  Banachräume, sowie  $B : X \times Y \rightarrow \mathbb{C}$  eine Bilinearform. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

- (i) Es existiert eine Konstante  $C > 0$  mit  $|B(x, y)| \leq C \|x\|_X \|y\|_Y$  für alle  $x \in X$  und  $y \in Y$ .
- (ii)  $B$  ist stetig.

HINWEIS: Stetigkeit und Folgenstetigkeit sind hier äquivalent.

**Aufgabe 9.2** Sei  $X$  ein separabler Banachraum. Zeigen Sie, dass  $X$  isometrisch isomorph zu einem Unterraum von  $\ell^\infty$  ist. Betrachten Sie hierzu den Operator  $\Phi : X \rightarrow \ell^\infty, x \mapsto (\Lambda_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  mit geeignet gewählten  $\Lambda_n \in X'$  für  $n \in \mathbb{N}$ .

HINWEIS: Hahn-Banach und Folgerungen ansehen.

**Aufgabe 9.3** Zeigen Sie, dass für einen normierten Raum  $X$  folgende Aussagen gelten:

- (i) Für alle  $x \in X$  gilt

$$\|x\|_X = \sup_{x' \in X' \setminus \{0\}, \|x'\|_{X'} \leq 1} |x'(x)|.$$

- (ii) Ein Untervektorraum  $U \subset X$  ist genau dann dicht in  $X$ , falls für alle  $x' \in X'$  mit  $x'|_U = 0$  bereits  $x' = 0$  gilt.

**Aufgabe 9.4** Seien  $X$  und  $Y$  Banachräume,  $A : X \rightarrow Y$  und  $B : Y' \rightarrow X'$  linear. Gilt für alle  $x \in X$  und alle  $y' \in Y'$

$$y'(Ax) = (By')(x),$$

dann gilt  $A \in L(X, Y)$  und  $B \in L(Y', X')$ .

HINWEIS: Zeigen Sie, dass  $A$  abgeschlossen ist.