Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Robert Denk
Mario Kaip

3. November 2011

Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik
2. Übungsblatt

Aufgabe 2.1 Beweisen oder widerlegen Sie die Aussage:

Jede Funktion $f \in L^2(\mathbb{R})$ verschwindet im Unendlichen.

(siehe Nolting, W.: Quantenmechanik Band I, S.310)

Aufgabe 2.2 Sei $\mathscr{H} \neq \{0\}$ ein Hilbertraum und $P \in L(\mathscr{H})$ eine orthogonale Projektion auf den abgeschlossenen Unterraum $\mathscr{V} \subset \mathscr{H}$ (d.h. $P = P^2 = P^*$ und $P(\mathscr{H}) = \mathscr{V}$).

(i) Zeigen Sie, dass $1 - P$ eine orthogonale Projektion auf $\mathscr{V}^\perp$ ist.

(ii) Zeigen Sie für einen beliebigen Operator $T \in L(\mathscr{H})$

$$T(\mathscr{V}) \subset \mathscr{V} \Leftrightarrow T^*(\mathscr{V}^\perp) \subset \mathscr{V}^\perp \Leftrightarrow PTP = TP.$$

(iii) Zeigen Sie: Ist T normal und gilt $T(\mathscr{V}) \subset \mathscr{V}$ sowie $T(\mathscr{V}^\perp) \subset \mathscr{V}^\perp$ dann ist die Restriktion $T_{|\mathscr{V}} \in L(\mathscr{V})$ auch normal.

Aufgabe 2.3 Berechnen Sie das Spektralmaß E und die Spektraldarstellung des Operators $A : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3, x \mapsto Mx$, wobei

$$M := \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 \\ i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}.$$

Berechnen Sie mit Hilfe des Spektralsatzes eine Matrix $N \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ mit $N^2 = M$.

Aufgabe 2.4

(i) Zeigen Sie, dass ein wesentlich selbstadjungierter Operator bereits symmetrisch ist.

(ii) Zeigen Sie, dass symmetrische Operatoren bereits abschließbar sind.

(iii) Zeigen Sie, dass $(\overline{A})^* = A^*$ gilt, falls der unbeschränkte Operator A abschließbar ist.

(iv) Zeigen Sie, dass $A^* = A^{**}$ genau dann gilt, wenn der unbeschränkte Operator A wesentlich selbstadjungiert ist.

Abgabetermin: Donnerstag 17. November 2011, in der Vorlesung.