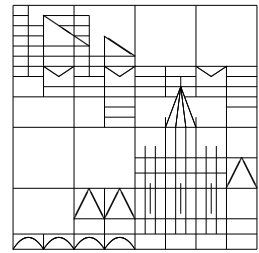


3. November 2011



## Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik 2. Übungsblatt

**Aufgabe 2.1** Beweisen oder widerlegen Sie die Aussage:

Jede Funktion  $f \in L^2(\mathbb{R})$  verschwindet im Unendlichen.

(siehe Nolting, W.: Quantenmechanik Band I, S.310)

**Aufgabe 2.2** Sei  $\mathcal{H} \neq \{0\}$  ein Hilbertraum und  $P \in L(\mathcal{H})$  eine orthogonale Projektion auf den abgeschlossenen Unterraum  $\mathcal{V} \subset \mathcal{H}$  (d.h.  $P = P^2 = P^*$  und  $P(\mathcal{H}) = \mathcal{V}$ ).

(i) Zeigen Sie, dass  $1 - P$  eine orthogonale Projektion auf  $\mathcal{V}^\perp$  ist.

(ii) Zeigen Sie für einen beliebigen Operator  $T \in L(\mathcal{H})$

$$T(\mathcal{V}) \subset \mathcal{V} \Leftrightarrow T^*(\mathcal{V}^\perp) \subset \mathcal{V}^\perp \Leftrightarrow PTP = TP.$$

(iii) Zeigen Sie: Ist  $T$  normal und gilt  $T(\mathcal{V}) \subset \mathcal{V}$  sowie  $T(\mathcal{V}^\perp) \subset \mathcal{V}^\perp$  dann ist die Restriktion  $T|_{\mathcal{V}} \in L(\mathcal{V})$  auch normal.

**Aufgabe 2.3** Berechnen Sie das Spektralmaß  $E$  und die Spektraldarstellung des Operators  $A : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3, x \mapsto Mx$ , wobei

$$M := \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 \\ i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3 \times 3}.$$

Berechnen Sie mit Hilfe des Spektralsatzes eine Matrix  $N \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$  mit  $N^2 = M$ .

**Aufgabe 2.4**

(i) Zeigen Sie, dass ein wesentlich selbstadjungierter Operator bereits symmetrisch ist.

(ii) Zeigen Sie, dass symmetrische Operatoren bereits abschließbar sind.

(iii) Zeigen Sie, dass  $(\overline{A})^* = A^*$  gilt, falls der unbeschränkte Operator  $A$  abschließbar ist.

(iv) Zeigen Sie, dass  $A^* = A^{**}$  genau dann gilt, wenn der unbeschränkte Operator  $A$  wesentlich selbstadjungiert ist.