Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Robert Denk
Martin Saal, Alexander Schöwe

17. November 2011

Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik
3. Übungsblatt

Aufgabe 3.1

(i) Sei $\mathscr{H}$ ein Hilbertraum und $T : \mathscr{H} \supset D(T) \to \mathscr{H}$ ein symmetrischer Operator für den $R(T \pm i)$ abgeschlossen ist. Zeigen Sie, dass T abgeschlossen ist.

(ii) Sei $D(A) := C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ und

$$\begin{aligned} A : L^2(\mathbb{R}^3) \supset D(A) &\to L^2(\mathbb{R}^3) \\ \varphi &\mapsto -\hbar^2 \left((y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y})^2 + (z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z})^2 + (x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x})^2 \right) \varphi. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass A symmetrisch ist aber nicht selbstadjungiert.

Aufgabe 3.2 Sei $X = [0,1], \mathscr{A} = \mathscr{B}([0,1])$. Für $f \in L^2([0,1])$ und $A \in \mathscr{A}$ definiere

$$(P_A f)(t) = \chi_A(t) f(t) = \begin{cases} f(t), & t \in A \\ 0, & t \notin A. \end{cases}$$

Zeigen Sie

$$E(A) = \begin{cases} P_{\frac{A}{2}}, & \frac{1}{3} \notin A \\ P_{\frac{A}{2}} + P_{[\frac{1}{2},1]}, & \frac{1}{3} \in A \end{cases}$$

ist ein projektorwertiges Maß. Hierbei ist $\frac{A}{2} = \{\frac{x}{2} : x \in A\}$.

Aufgabe 3.3 Definiere für alle $t \in \mathbb{R}$ die Operatoren

$$\begin{aligned} T(t) : L^2(\mathbb{R}) &\to L^2(\mathbb{R}) \\ f(\cdot) &\mapsto f(\cdot + t). \end{aligned}$$

Zeigen Sie $(T(t))_{t\in\mathbb{R}}$ ist eine starkstetige unitäre Gruppe. Was hat diese Operatorfamilie mit dem Impulsoperator zu tun?

Aufgabe 3.4 Sei

$$D(A) := \left\{ h \in L^2((0,\pi)) : \Delta h \in L^2((0,\pi)), h(0) = h(\pi) = 0 \right\}.$$

und der Operator A gegeben durch

$$\begin{aligned} A : L^2((0,\pi)) \supset D(A) &\to L^2((0,\pi)) \\ h &\mapsto -\Delta h. \end{aligned}$$

Bestimmen sie das Spektrum und die Spektraldarstellung von A.
Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass A selbstadjungiert ist.