Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Robert Denk
Mario Kaip

1. Dezember 2011

Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik
4. Übungsblatt

Aufgabe 4.1 Sei $A\colon \mathscr{H} \supset D(A) \to \mathscr{H}$ ein symmetrischer Operator auf dem Hilbertraum $\mathscr{H} \neq \{0\}$. Zeigen Sie nun: Gilt $\rho(A) \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$, dann ist A schon selbstadjungiert.

Aufgabe 4.2 Gegeben sei der Laplaceoperator

$$\Delta\colon L^2(\mathbb{R}) \supset D(\Delta) \to L^2(\mathbb{R}), \quad u \mapsto u''$$

mit $D(\Delta) := H^2(\mathbb{R})$.

(i) Zeigen Sie, dass Δ selbstadjungiert ist.

(ii) Zeigen Sie, dass der Hamiltonoperator

$$H\psi := -\frac{\hbar^2}{2m}\psi'', \qquad \psi \in H^2(\mathbb{R})$$

keine Eigenzustände besitzt. Was sagt dies über die stationären Zustände eines freien Teilchens aus?

Hinweis: Zeigen Sie in (i), dass die Resolventen des Laplaceoperators mittels der Fouriertransformation dargestellt werden können.

Aufgabe 4.3 (Zeitliche Entwicklung eines freien Teilchens)

(i) Sei $\alpha \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}\alpha > 0$. Berechnen Sie die Fouriertransformation von $f(x) := \exp(-\alpha x^2)$ $(x \in \mathbb{R})$ indem Sie für f eine Differentialgleichung der Form $u'(x) + \beta x u(x) = 0$ herleiten und lösen.

(ii) Sei $\beta \in \mathbb{R}$ beliebig gewählt. Zeigen Sie nun, dass für $f_\varepsilon(x) := \exp(-(\varepsilon + i\beta)x^2)\psi(x)$ $(x \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0)$ und alle $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ schon $f_\varepsilon \to f$ für $\varepsilon \to 0$ in $L^2(\mathbb{R})$ gilt. Dabei ist $f(x) := \exp(-i\beta x^2)\psi(x)$ $(x \in \mathbb{R})$.

(iii) Zeigen Sie unter Verwendung von (i) und (ii)

$$\exp(-itH/\hbar)\psi = \sqrt{\frac{m}{2\pi i t\hbar}} \cdot \int_{\mathbb{R}} \exp\left(\frac{im}{2t\hbar}(x - \cdot)^2\right)\psi(x)dx$$

für $\psi \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ und $t \neq 0$. Hierbei ist H der Hamiltonoperator aus Aufgabe 4.2 (ii). Sie dürfen dabei ohne Beweis die Darstellung

$$\exp(-itH/\hbar) = \mathscr{F}^{-1}\exp\left(-i\frac{t\hbar}{2m}\xi^2\right)\mathscr{F}$$

verwenden.

Abgabetermin: Donnerstag 15. Dezember 2011, in der Vorlesung.