



15. Dezember 2011

Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik 5. Übungsblatt

Aufgabe 5.1 Sei $h_n(x) := e^{x^2/2} \left(x - \frac{d}{dx}\right)^n e^{-x^2/2}$, $n \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie:

- (i) Es gilt $h_{n+1}(x) = 2xh_n(x) - h'_n(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_0$.
- (ii) Es gilt $h_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \left(\frac{d}{dx}\right)^n e^{-x^2}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_0$.

Aufgabe 5.2 (Langzeitasymptotik eines freien Teilchens) Sei H der Hamiltonoperator eines freien eindimensionalen Teilchens (siehe Aufg. 4.3) und $\Psi \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass

$$\left\| \exp\left(\frac{-itH}{\hbar}\right) \psi - \sqrt{\frac{m}{it\hbar}} \exp\left(\frac{im}{2t\hbar} \cdot^2\right) (\mathcal{F}\psi)\left(\frac{m}{t\hbar} \cdot\right) \right\|_2 \rightarrow 0$$

für $|t| \rightarrow \infty$ gilt.

Aufgabe 5.3 Seien A und V beide symmetrische Operatoren auf dem Hilbertraum \mathcal{H} mit $D(A) \subset D(V)$. Außerdem existieren Konstanten $c \in (0, 1)$ und $d > 0$ so, dass

$$\|Vx\| \leq c\|Ax\| + d\|x\|, \quad x \in D(A)$$

gilt. Zeigen Sie: Ist A selbstadjungiert, so ist der Operator $A + V$ auch selbstadjungiert.

HINWEIS: Untersuchen Sie $R(i\mu - (A + V))$ für große $|\mu|$ und verwenden Sie die Neumannsche Reihe.

Aufgabe 5.4 (Schrödinger-Gleichung mit δ -Potential) Die Bestimmung eines stationären Zustandes der eindimensionalen Schrödinger-Gleichung mit δ -Potential führt auf die formale Gleichung

$$-u''(x) - \delta(x)u(x) = Eu(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

mit der Energie $E \in \mathbb{R}$ und der ' δ -Funktion' δ . Bestimmen Sie nun eine distributionelle Lösung $(U, E) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$ der zugehörigen distributionellen Gleichung

$$-U'' - u\delta = EU$$

wobei angenommen sei, dass $U \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ von einer Funktion $u \in C(\mathbb{R}) \cap C^2(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ erzeugt wird. Dabei ist $(u\delta)(\phi) := \delta(u\phi)$ für $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

HINWEIS: Berechnen Sie U'' und beachten sie anschließend, dass die δ -Distribution singularär ist.

Das MGdQM-Team wünscht euch allen frohe Weihnachten!