

**UNIVERSITÄT LEIPZIG**

**FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK UND INFORMATIK  
MATHEMATISCHES INSTITUT**

**Zur Existenz viskoser Profile für Schockwellen  
in der isothermen Magnetohydrodynamik**

*Diplomarbeit*

**vorgelegt von**

**Andreas Klaiber**

**Studiengang Diplom-Mathematik**

Leipzig, Mai 2009

**Betreuender Hochschullehrer:**

**Prof. Dr. Heinrich Freistühler  
Universität Konstanz  
Fachbereich Mathematik und Statistik**

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einführung</b>	<b>3</b>
1.1	Einleitung . . . . .	3
1.2	Zum Gegenstand dieser Diplomarbeit . . . . .	5
1.2.1	Aufgabenstellung . . . . .	5
1.2.2	Bezeichnungen . . . . .	6
1.2.3	Erzielte Ergebnisse . . . . .	7
1.2.4	Ausblick . . . . .	8
1.3	Motivation der Problemstellung . . . . .	9
1.4	Zum physikalischen Kontext . . . . .	10
1.4.1	Die Gleichungen der IMHD . . . . .	10
1.4.2	Die Zustandsfunktion . . . . .	11
1.4.3	Typische Geschwindigkeiten . . . . .	12
<b>2</b>	<b>Topologische und analytische Hilfsmittel</b>	<b>13</b>
2.1	Begriffe und Sätze aus der Theorie der Dynamischen Systeme . . . . .	13
2.2	Direkte Existenzsätze für heterokline Orbits . . . . .	16
2.3	Conley-Index-Theorie . . . . .	19
2.3.1	Vorbereitung: Topologische Grundbegriffe . . . . .	19
2.3.2	Der Conley-Index und Eigenschaften . . . . .	22
2.3.3	Zusammenhangsmatrizen ( <i>connection matrices</i> ) . . . . .	30
2.4	Geometrische singuläre Störungstheorie . . . . .	32
2.4.1	Bezeichnungen . . . . .	32
2.4.2	Die „langsame“ Mannigfaltigkeit . . . . .	33
2.4.3	Persistenz heterokliner Orbits . . . . .	34
<b>3</b>	<b>Elementare Analyse des dynamischen Systems</b>	<b>38</b>
3.1	Lyapunov-Funktion und Skalierung . . . . .	38
3.2	Bestimmung der Ruhelagen . . . . .	39
3.3	Das koplanare Teilsystem . . . . .	47
3.4	Das linearisierte Problem . . . . .	50
3.4.1	Linearisierung von $(\Sigma^5)$ . . . . .	50
3.4.2	Linearisierung von $(\Sigma^3)$ . . . . .	50
3.4.3	Die Vorzeichen der Eigenwerte . . . . .	50
<b>4</b>	<b>Zur Existenz heterokliner Orbits</b>	<b>54</b>
4.1	Existenz des Profils für den schnellen Schock . . . . .	54
4.2	Der Spezialfall $a = 0$ . . . . .	58
4.3	Der Spezialfall $c = 0$ . . . . .	62

4.4	Untersuchung singularer Spezialfälle . . . . .	67
4.4.1	Der Spezialfall $\nu = 0$ . . . . .	67
4.4.2	Der Spezialfall $\eta = 0$ . . . . .	84
4.4.3	Die Spezialfälle $\nu \rightarrow \infty, \eta \rightarrow \infty$ und $\mu \rightarrow \infty$ . . . . .	87
4.5	Untersuchungen mithilfe singularer Störungstheorie . . . . .	93
4.6	Untersuchungen mithilfe des Conley-Index . . . . .	97
4.7	Untersuchungen mithilfe von Zusammenhangsmatrizen . . . . .	99
4.7.1	Der uneingeschränkte Fall . . . . .	99
4.7.2	Der koplanare Fall . . . . .	100
<b>A</b>	<b>Die Profil-Gleichung</b>	<b>104</b>
A.1	Herleitung der Gleichungen . . . . .	104
A.2	Reduktion der Parameter . . . . .	106
<b>B</b>	<b>Die partiellen Differentialgleichungen der IMHD</b>	<b>108</b>
B.1	Nichtstrikte Hyperbolizität – Das koplanare System . . . . .	108
B.2	Nichtstrikte Hyperbolizität – Das uneingeschränkte System . . . . .	109
<b>C</b>	<b>Beweise von Abschnitt 4.6</b>	<b>111</b>
C.1	Beschränktheit von $S$ . . . . .	111
C.2	Isolierte Invarianz von $S$ . . . . .	118
<b>D</b>	<b>Symbolerläuterung</b>	<b>121</b>
	<b>Zusammenfassung</b>	<b>123</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>125</b>
	<b>Ehrenerklärung</b>	<b>127</b>

# 1 Einführung

## 1.1 Einleitung

Systeme von Erhaltungsgleichungen treten häufig in Anwendungen auf, weil sie sich aus bekannten Erhaltungssätzen, wie z.B. Erhaltung der Masse, Impulserhaltung oder Energieerhaltung, ergeben. Ein einfaches Beispiel für ein derartiges System stellen die Euler-Gleichungen der isothermen Gasdynamik dar. Es ist lange bekannt, dass Systeme von Erhaltungsgleichungen typischerweise nicht differenzierbare und sogar unstetige Lösungen erlauben, wenn der Lösungsbegriff in geeigneter Weise abgeschwächt wird.

Man ist daran interessiert, unter den möglichen Stoßwellen die physikalisch relevanten Lösungen auszusondern, und es gibt einige derartige *Entropie*-Kriterien, etwa die Entropiebedingungen von P. Lax für strikt hyperbolische Systeme. In der vorliegenden Arbeit wird ein anderes Kriterium betrachtet: die *Methode verschwindender Viskosität* oder *vanishing viscosity approximation*. Hierfür betrachtet man neben dem ursprünglichen System von Erhaltungsgleichungen das um dissipative Effekte erweiterte System, welche häufig durch Terme der Gestalt  $\varepsilon \partial_{xx}(\cdot)$  mit einem Parameter  $\varepsilon > 0$  – wie die Viskosität in der Gasdynamik – modelliert werden, weshalb man solche Terme auch in anderen Kontexten als *Viskosität* und den Parameter  $\varepsilon$  als *Viskositätskoeffizienten* bezeichnet. Dem Kriterium der verschwindenden Viskosität liegt die Idee zugrunde, dass die physikalisch sinnvollen Lösungen des Systems ohne Viskosität aus den von den Viskositätskoeffizienten abhängigen Lösungen des viskosen Systems hervorgehen sollten, wenn die eingeführten Viskositätskoeffizienten sämtlich gegen Null streben.

Aus diesem Grund ist die Frage nach der Existenz viskoser Profile für Schockwellen in Systemen von Erhaltungsgleichungen ein klassisches Thema, dessen Anfang in den Arbeiten [Wey49] von H. Weyl und [Gil51] von D. Gilbarg liegt, in welchen die Autoren eine Antwort für die Gleichungen der Gasdynamik geben.

Danach wurde die Frage nach der Existenz viskoser Profile für verschiedene andere Systeme gestellt, insbesondere wurde das Problem für die Gleichungen der Magnetohydrodynamik (MHD) von P. Germain in [Ger59] formuliert und untersucht. Dabei hat er insbesondere gezeigt, dass für das dissipative System (ebenso wie bei den Gleichungen der Gasdynamik) *travelling waves* als Lösungen auftreten.

Der *travelling wave*-Ansatz reduziert das System partieller Differentialgleichungen auf ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen, in welchem sich die Suche nach viskosen Profilen in die Frage nach der Existenz verschiedener Ruhelagen und heterokliner Orbits zwischen ihnen übersetzt. Das ursprüngliche Problem, das von Lösungen partieller Differentialgleichungen handelt, wird auf diese Weise zu einem Problem aus der Theorie der dynamischen Systeme, das von der Existenz heterokliner Orbits han-

delt. Für dieses letztere Problem sind sehr verschiedene Methoden benutzt worden, von denen einige in Kapitel 2 vorgestellt werden.

Die Erhaltungsgleichungen der Gasdynamik führen auf diese Weise zu einem zweidimensionalen dynamischen System, welches genau zwei Ruhelagen und einen sie verbindenden heteroklinen Orbit besitzt; die Herleitung und der Beweis sind Gegenstand der Arbeit [Gil51]. Dabei wird die Existenz eines heteroklinen Orbits aus einer elementaren Analyse des Phasenportraits abgeleitet.

Bereits bei P. Germain wird deutlich, dass das *Struktur-Problem* – wie die Frage nach der Existenz viskoser Profile etwa von C. Conley und J. Smoller bezeichnet wird – für die Magnetohydrodynamik schwieriger ist als für die Gasdynamik. Eine Ursache ist die Anwesenheit von vier Ruhelagen, die jeweils möglicherweise durch einen heteroklinen Orbit verbunden sein könnten. Ein weiteres erschwerendes Problem ist eng hiermit verknüpft: Zwischen welchen Ruhelagen heterokline Orbits existieren, hängt von den konkreten Werten der Viskositätsparameter ab.

P. Germain hat in der Arbeit [Ger59] nur für eine Sorte von Schockwellen (die sogenannten *schnellen* Schocks) die Existenz eines eindeutigen Profils im Stile von D. Gilbarg beweisen können.<sup>1</sup>

Es hat sich herausgestellt, dass die einfache Frage nach der Existenz heterokliner Orbits mitunter sehr schwer zu beantworten ist, und zwar um so schwerer je größer die Dimension des Phasenraums ist. Mit den bis dato verwandten Mitteln, nämlich geschickter elementarer Phasenraum-Analyse, wurde kein weiterer Fortschritt erzielt und die nächsten Resultate erschienen erst in der Mitte der 70er Jahre, als C. Conley und J. Smoller die Existenz von Profilen für den *schnellen* und *langsamen* Schock bewiesen haben ([CS74] und [CS75]), indem sie ein neu eingeführtes topologisches Werkzeug – heutzutage als *Conley-Index* bekannt – auf das vorliegende Problem anwendeten. Weitere Resultate wurden von M. Hesaaraki (siehe [Hes84]) erbracht, der die Existenz von Profilen für *Einschalt-* und *Ausschalt-*Schockwellen<sup>2</sup> bewies und das Auftreten von *Subschocks* für den schnellen und langsamen Schock diskutierte.

Später konnte auch für die intermediären Schockwellen der MHD die *Existenz von Struktur* nachgewiesen werden, jedoch ist die Beschreibung der globalen heteroklinen Bifurkation noch nicht vollständig gelungen. Zu diesem Problem gab es zwei methodisch sehr verschiedene Beiträge:

(1) In der Arbeit [HM90] von K. Mischaikow und H. Hattori wurden auf dem Conley-Index aufbauende Methoden (*connection matrices* und *transition matrices*) benutzt, um einerseits den in [CS74] geführten Beweis für die Existenz von Profilen zu vereinfachen und andererseits um Vermutungen über die Beschaffenheit der globalen Bifurkation zu formulieren.

(2) In der Arbeit [FS95] von P. Szmolyan und H. Freistühler wurde zum ersten Mal die

---

<sup>1</sup>M. Hesaaraki hat angemerkt, dass dieser Beweis mathematisch ungenau geführt ist und man findet eine korrigierte Version in [Hes84].

<sup>2</sup>Das bedeutet, für Anfangs- bzw. Endzustand der Stoßwelle verschwindet der transversale Anteil des Magnetfeldes.

Existenz von Profilen für *alle* intermediären Schockwellen der MHD bewiesen und zu diesem Zweck verwenden die Autoren Ideen der *geometrischen singulären Störungstheorie*.

Alle zuvor genannten Ergebnisse beziehen sich auf die *allgemeine* Magnetohydrodynamik. Um die Untersuchung der Bifurkation weiterzuführen, soll ein physikalisch relevanter Spezialfall diskutiert werden: die *isotherme* Magnetohydrodynamik (IMHD). Unter der Annahme konstanter Temperatur entfällt eine Gleichung und die Zustandsgleichung muss modifiziert werden. Die Untersuchung der Existenz von viskosen Profilen für Schockwellen der IMHD ist das Thema der vorliegenden Arbeit.

## 1.2 Zum Gegenstand dieser Diplomarbeit

### 1.2.1 Aufgabenstellung

Das Ziel der vorliegenden Arbeit besteht in der Analyse des dynamischen Systems, das die *viskosen Profile* der isothermen Magnetohydrodynamik beschreibt, insbesondere sollen die Frage, welche heteroklinen Orbits zu gegebenen Viskositätskoeffizienten existieren, untersucht und eine möglichst vollständige Beschreibung der globalen heteroklinen Bifurkation angegeben werden.

Wenn das betrachtete hyperbolische System in einer Raumdimension

$$\partial_t \mathbf{u} + \partial_x (f(\mathbf{u})) = 0$$

mit  $\mathbf{u} \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$  und  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$  lautet, so ist die durch

$$\mathbf{u} : \mathbb{R} \times [0, \infty) \rightarrow \mathcal{U}, (x, t) \mapsto \begin{cases} \mathbf{u}_- & \text{für } x - st < 0 \\ \mathbf{u}_+ & \text{für } x - st > 0. \end{cases}$$

gegebene Schockwelle genau dann eine Lösung dieses Systems, wenn die *Rankine-Hugoniot-Bedingungen*

$$f(\mathbf{u}_+) - f(\mathbf{u}_-) = s(\mathbf{u}_+ - \mathbf{u}_-)$$

erfüllt sind.

Wir nehmen nun an, die Schockwelle  $\mathbf{u}(x, t)$  stelle eine Lösung des Systems der isothermen Magnetohydrodynamik dar (siehe Anhang B). Die Schockwelle  $\mathbf{u}(x, t)$  besitzt genau dann ein *viskoses Profil*  $\phi$  zu den Viskositätskoeffizienten  $(\mu, \nu, \eta)$ , wenn das System

$$\begin{aligned} \mu v' &= mv + p(v) + \frac{1}{2} |\mathbf{b}|^2 - j \\ \nu \mathbf{w}' &= m\mathbf{w} - a\mathbf{b} \\ \eta \mathbf{b}' &= v\mathbf{b} - a\mathbf{w} - \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{\Sigma^5}$$

gewöhnlicher Differentialgleichungen die Ruhelagen  $\mathbf{u}_-$  und  $\mathbf{u}_+$  besitzt und ein heterokliner Orbit  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{U}$  zwischen ihnen existiert<sup>3</sup>, d.h.  $\phi$  ist eine Lösung von  $(\Sigma^5)$  und es gilt

$$\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \phi(\xi) = \mathbf{u}_\pm.$$

Dabei bezeichnet

$$\mathcal{U} := \{(v, \mathbf{w}, \mathbf{b})\} = \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$$

den Zustandsraum.

Mit diesen Bezeichnungen lässt sich die Aufgabenstellung des Problems konkretisieren:

Welche Ruhelagen besitzt das System  $(\Sigma^5)$  zu gegebenen Parametern  $(j, c) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ ?

Welche heteroklinen Orbits treten in Abhängigkeit von  $(\mu, \nu, \eta) \in (\mathbb{R}_{>0})^3$  auf?

### 1.2.2 Bezeichnungen

Wir geben die in der Literatur über Magnetohydrodynamik etablierten und im Folgenden verwendeten Bezeichnungen der leichten Verständlichkeit halber an.

Das System

$$\begin{aligned} \mu v' &= mv + p(v) + \frac{1}{2} |\mathbf{b}|^2 - j \\ \nu \mathbf{w}' &= m\mathbf{w} - a\mathbf{b} \\ \eta \mathbf{b}' &= v\mathbf{b} - a\mathbf{w} - \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\Sigma^5)$$

besitzt das invariante Teilsystem<sup>4</sup>

$$\begin{aligned} \mu v' &= mv + p(v) + \frac{1}{2} b^2 - j \\ \nu w' &= mw - ab \\ \eta b' &= vb - aw - c, \end{aligned} \quad (\Sigma^3)$$

das durch  $w_2 = b_2 = 0$  definiert wird und alle Ruhelagen von  $(\Sigma^5)$  enthält; dabei wird zur Abkürzung  $w := w_1$  und  $b := b_1$  geschrieben. Unter einem *koplanaren*<sup>5</sup> viskosen Profil

$$\phi = \phi(t) = (v(t), w_1(t), w_2(t), b_1(t), b_2(t))^T$$

versteht man einen heteroklinen Orbit von  $(\Sigma^5)$ , welcher

$$w_2(t) = b_2(t) = 0 \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}$$

<sup>3</sup>Diese Umformulierung wird in Anhang A präsentiert.

<sup>4</sup>Siehe Abschnitt 3.3.

<sup>5</sup>Dieser Name kommt daher, dass  $\mathbf{w}$  und  $\mathbf{b}$  auf einer Gerade und somit die Vektoren  $\vec{v}$  und  $\vec{B}$  in einer Ebene liegen.

erfüllt, d.h.

$$\tilde{\phi} = \tilde{\phi}(t) = (v(t), w_1(t), b_1(t))^T$$

ist ein heterokliner Orbit von  $(\Sigma^3)$ . Entsprechend nennen wir  $(\Sigma^3)$  das *koplanare* bzw.  $(\Sigma^5)$  das *uneingeschränkte* System.

Zur Abkürzung des Tripels von Viskositätskoeffizienten  $(\mu, \nu, \eta)$  schreiben wir gelegentlich  $\delta := (\mu, \nu, \eta)$ . Obgleich aus physikalischer Sicht in realen Systemen stets

$$\mu, \nu, \eta \in (0, \infty)$$

– was wir durch  $\delta > 0$  kurz ausdrücken werden – gilt, so ist es dennoch von (nicht nur mathematischem) Wert, auch die Grenzfälle  $\mu = 0$ ,  $\nu = 0$  und  $\eta = 0$  sowie  $\mu \rightarrow \infty$ ,  $\nu \rightarrow \infty$ ,  $\eta \rightarrow \infty$  zu betrachten. Um auszudrücken, dass die ersten drei der genannten Grenzfälle in bestimmten Aussagen ebenfalls zulässig sind, schreiben wir kurz  $\delta \geq 0$ .

Wie später gezeigt wird, gibt es für eine unbeschränkte Menge von Parameterwerten  $(j, c)$  genau vier Ruhelagen  $\mathbf{u}_i$  mit  $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ , die durch einen Schock verbunden sein könnten. Dabei sind folgende Bezeichnungen<sup>6</sup> üblich:

- *schneller* Schock: ein Schock  $\mathbf{u}_0 \rightarrow \mathbf{u}_1$  für  $c > 0, \delta \geq 0$ .
- *langsamer* Schock: ein Schock  $\mathbf{u}_2 \rightarrow \mathbf{u}_3$  für  $c > 0, \delta \geq 0$ .
- *gasdynamischer* Schock: der Schock  $\mathbf{u}_0 \rightarrow \mathbf{u}_3$  für  $c = 0, \delta \geq 0$ .
- *intermediärer* Schock: ein Schock  $\mathbf{u}_i \rightarrow \mathbf{u}_j$  mit  $i \in \{0, 1\}$  und  $j \in \{2, 3\}$  (ohne Einschränkung an  $c, \delta$ ).
- *Einschalt-Schock, Ausschalt-Schock*: Schocks  $\mathbf{u}_0 \rightarrow \mathbf{u}_i$  bzw.  $\mathbf{u}_i \rightarrow \mathbf{u}_3$  für  $c = 0, \delta \geq 0$ .
- *Subschock*: ein Schock, mit einem unstetigen Orbit.

Gelegentlich wird anstelle von  $\mathbf{u}_i \rightarrow \mathbf{u}_j$  auch  $i \rightarrow j$  geschrieben.

### 1.2.3 Erzielte Ergebnisse

- Die Systeme  $(\Sigma^3)$  und  $(\Sigma^5)$  sind gradientenartig und besitzen für eine unbeschränkte, offene Menge von Parametern  $(j, c)$  genau vier Ruhelagen.
- Wenn  $\delta > 0$  ist, so besitzt der schnelle Schock für  $(\Sigma^3)$  ein eindeutig bestimmtes Profil.
- Der schnelle und der langsame Schock von  $(\Sigma^5)$  besitzen Profile (mithilfe des Conley-Index). Dieses Resultat konnte auch via *connection matrices* erzielt werden.
- Für die Grenzfälle  $\nu = 0$  und  $\eta = 0$  von  $(\Sigma^3)$  haben der schnelle und langsame Schock stets Profile und es existiert ein  $\omega^*$ , mit welchem für das Verhältnis  $\omega$  der beiden übrigen Viskositätskoeffizienten gilt:

<sup>6</sup>Die Nummerierung der Ruhelagen erfolgt konventionsgemäß nach fallender  $v$ -Komponente.



- (a) Ist  $\omega < \omega^*$ , so besitzt kein intermediärer Schock ein Profil.
  - (b) Ist  $\omega = \omega^*$ , so besitzt nur der intermediäre Schock  $1 \rightarrow 2$  ein Profil.
  - (c) Ist  $\omega > \omega^*$ , so besitzt jeder intermediäre Schock außer  $1 \rightarrow 2$  ein Profil.
- Innerhalb des Grenzfalles  $\nu = 0$  können (für  $\mu \rightarrow 0$ ) Subschocks der Art  $0 \rightarrow 1$ ,  $0 \rightarrow 2$ ,  $0 \rightarrow 3$ ,  $1 \rightarrow 3$  und  $2 \rightarrow 3$  auftreten, je nach Vorzeichen des Ausdrucks  $m + p'(v_i)$  für  $i \in \{1, 2\}$ , welches einer einfachen physikalischen Bedingung entspricht:  $\text{sign}(m + p'(v_i)) > 0 \iff v_i > c_s$ .
  - Im Fall  $\nu = 0$  ist der Orbit  $1 \rightarrow 2$  in allen nichtkonstanten Komponenten monoton.
  - Die Resultate der Grenzfälle  $\nu = 0$  und  $\eta = 0$  übertragen sich mithilfe singulärer Störungstheorie auf die Bereiche  $0 < \nu \ll \min\{\mu, \eta\}$  bzw.  $0 < \eta \ll \min\{\mu, \nu\}$ .
  - Im Fall  $\nu = 0$  ist die Dynamik auf eine zweidimensionale Ebene beschränkt und im Fall  $0 < \nu \ll \min\{\mu, \eta\}$  auf eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit  $S^\nu$ .
  - Weitere Grenzfälle:
    - $\mu \rightarrow \infty$ : Es existieren ausschließlich die *langsamen* Orbits  $0 \rightarrow 1$  und  $2 \rightarrow 3$  und keine *singulären* Orbits.
    - $\nu \rightarrow \infty$ : Es existieren ausschließlich die *langsamen* Orbits  $0 \rightarrow 2$  und  $1 \rightarrow 3$  sowie die *singulären* Orbits  $0 \rightarrow 1$ ,  $0 \rightarrow 3$  und  $2 \rightarrow 3$ .
    - $\eta \rightarrow \infty$ : In Abhängigkeit vom Vorzeichen von  $m + p'(v_i)$  gibt es genau einen der *langsamen* Orbits  $0 \rightarrow 1$  bzw.  $0 \rightarrow 2$  und genau einen der *langsamen* Orbits  $1 \rightarrow 3$  bzw.  $2 \rightarrow 3$ .
  - Für den Spezialfall  $c = 0$  existieren der schnelle, der langsame und alle intermediären Stoßwellen außer  $1 \rightarrow 2$  für jede Wahl  $\delta > 0$ , d.h. Einschalt- und Ausschaltshocks besitzen Profile.

#### 1.2.4 Ausblick

Das ferne Ziel der Überlegungen soll natürlich die vollständige Beschreibung der globalen Bifurkation sein, deren vermutete Gestalt wir hier notieren.

#### **Vermutung.**

Sei

$$\kappa := \frac{\mu}{\max\{\nu, \eta\}}.$$

Dann existiert ein  $\kappa^* > 0$ , sodass für

- (a)  $\kappa > \kappa^*$  keine der intermediären Schockwellen
- (b)  $\kappa = \kappa^*$  ausschließlich der intermediäre Schock  $1 \rightarrow 2$
- (c)  $\kappa < \kappa^*$  alle intermediären Schocks außer  $1 \rightarrow 2$  viskose Profile besitzen.

In den Fällen  $0 < \nu \ll \min\{\mu, \eta\}$  und  $0 < \eta \ll \min\{\mu, \nu\}$  stimmt diese Vermutung nach den bewiesenen Resultaten.

Eine Erfolg versprechende Idee besteht im Nachweis der Existenz einer zweidimensionalen invarianten Mannigfaltigkeit, die sämtliche heteroklinen Orbits enthält. Für kleine  $\nu > 0$  konnte ein Beweis bereits erbracht werden.

**Vermutung.**

Für  $\nu \in (0, \infty)$  existiert eine zweidimensionale invariante glatte Mannigfaltigkeit  $S^\nu$ , die sich als Graph in der Form

$$w = W^\nu(v, b)$$

mit einer glatten Funktion  $W^\nu(v, b)$  schreiben lässt.

### 1.3 Motivation der Problemstellung

**Vorbemerkung.** Ungeachtet der Tatsache, dass die Untersuchung des dynamischen Systems für sich genommen von mathematischem Interesse ist – wie man etwa an der Zahl der Publikationen zu dieser und sinnverwandten Fragen sehen kann –, sollen in diesem Abschnitt einige Punkte näher beleuchtet werden, die eine Einordnung des vorgestellten Problems in breitere Themenfelder ermöglichen.

**Nichtstrikte Hyperbolizität.** Eine wesentliche Eigenschaft ist, dass es sich bei den Gleichungen der Magnetohydrodynamik um ein *natürliches* Beispiel eines *nichtstrikt* hyperbolischen Systems von Erhaltungsgleichungen (siehe B) handelt, weil es einen realen, physikalischen Prozess modelliert, und deshalb kann man die erzielten Lösungen möglicherweise experimentell überprüfen oder ihre Konsistenz mit physikalischen Prinzipien testen.

**Zulässige Schockwellen.** Im Laufe der Zeit hat sich die Ansicht darüber, was eine physikalisch sinnvolle (d.h. *zulässige*) Stoßwelle sei, geändert und dementsprechend auch das Interesse an der Existenz heterokliner Orbits. Wir skizzieren diese Entwicklung kurz, weil sie die Bedeutung des vorliegenden Problems unterstreicht.

Den Publikationen zufolge hat P. Germain die Diskussion des *Struktur*-Problems für die Magnetohydrodynamik begonnen; er vertritt in der Arbeit [Ger59] die Ansicht, ein gegebener Schock ist genau dann zulässig, wenn

(a) das dissipative System für *jede* Wahl der Viskositätskoeffizienten eine Lösung besitzt und

(b) diese Schar von Lösungen (die von den Viskositätskoeffizienten abhängen) gleichmäßig gegen die gegebene Schocklösung konvergiert, wenn die Viskositätskoeffizienten gegen Null streben.

Im Sinne dieser Definition zeigte er, dass der schnelle Schock stets zulässig (Germain spricht von *stable* [frz.]) ist und dass ein intermediärer Schock *niemals* zulässig sein kann.

Dieses Zulässigkeitskriterium kollidierte jedoch mit späteren Ergebnissen physikalischer Experimente und numerischen Berechnungen, denen zufolge intermediäre Schocks tatsächlich physikalisch relevant sind. Die daraufhin wieder entfachte Debatte um die Zulässigkeit der Schocks hat schließlich zu dem Standpunkt geführt, eine Schockwelle dann als zulässig anzusehen, wenn

(a) das dissipative System für eine gewisse Teilmenge der Viskositätskoeffizienten eine Lösung besitzt und

(b) diese Schar von Lösungen (die von den Viskositätskoeffizienten abhängen) gleichmäßig gegen die gegebene Schocklösung konvergiert, wenn die Viskositätskoeffizienten gegen Null streben.

Legt man diese Definition zugrunde, dann ist die Hauptaussage der Arbeit [FS95], dass alle auftretenden Stoßwellen zulässig sind. Dieses Ergebnis passt nun mit den physikalischen und numerischen Resultaten zusammen.

**Nachbemerkung.** Die *dynamische Stabilität* viskoser Schockwellen kann im Limes verschwindender Viskosität verlorengehen. Auf diesen nicht unwichtigen Aspekt kann die vorliegende Arbeit nicht näher eingehen. Stattdessen sei dazu auf die folgende Publikation verwiesen:

FREISTÜHLER, H.: Non-uniformity of vanishing viscosity approximation. *Appl. Math. Lett.* 6 (1993), Nr. 2, S. 35–41.

## 1.4 Zum physikalischen Kontext

### 1.4.1 Die Gleichungen der IMHD

Für die isotherme Magnetohydrodynamik werden die Gleichungen der isothermen Gasdynamik mit den Maxwell'schen Gleichungen der Elektrodynamik gemeinsam betrachtet:

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0 \quad (1.1)$$

$$\partial_t(\rho \vec{v}) + \operatorname{div}(\rho \vec{v} \otimes \vec{v} + p(\rho) \operatorname{Id}) - (\operatorname{rot} \vec{B}) \times \vec{B} = 0 \quad (1.2)$$

$$\partial_t \vec{B} - \operatorname{rot}(\vec{v} \times \vec{B}) = 0 \quad (1.3)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0. \quad (1.4)$$

Die Variablen haben folgende physikalische Bedeutung:  $\rho = \rho(t, \vec{x})$  die Dichte,  $\vec{v} = \vec{v}(t, \vec{x})$  die Geschwindigkeit,  $\vec{B} = \vec{B}(t, \vec{x})$  die magnetische Flussdichte,  $p = p(\rho)$  Druck. Die angegebenen Gleichungen sind physikalische Gesetze: Die Gleichungen (1.1) und (1.2) bedeuten Massen- bzw. Impulserhaltung, Gleichung (1.3) ergibt sich aus dem Induktionsgesetz unter Vernachlässigung der Verschiebungsstromdichte und Gleichung (1.4) drückt die Quellenfreiheit von Magnetfeldern aus. Eine ausführliche Diskussion der Gleichungen findet man in den Lehrbüchern [KL65] und [Cab70].

Wie im Anhang A.1 gezeigt wird, lässt sich das System von Gleichungen in dem hier interessierenden Fall, dass alle Größen nur von *einer* Raumvariablen  $x := x_1$  abhängen, vereinfachen und man erhält mit den Bezeichnungen

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v \\ w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}, \quad \vec{B} = \begin{pmatrix} a \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} \partial_t \rho + \partial_x(\rho v) &= 0 \\ \partial_t(\rho v) + \partial_x \left( \rho v^2 + p + \frac{1}{2} |\mathbf{b}|^2 \right) &= 0 \\ \partial_t(\rho \mathbf{w}) + \partial_x(\rho v \mathbf{w} - a \mathbf{b}) &= 0 \\ \partial_t \mathbf{b} + \partial_x(v \mathbf{b} - a \mathbf{w}) &= 0 \end{aligned}$$

und

$$a = \text{const.}$$

Das entsprechende dissipative System ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \partial_t \rho + \partial_x(\rho v) &= 0 \\ \partial_t(\rho v) + \partial_x \left( \rho v^2 + p + \frac{1}{2} |\mathbf{b}|^2 \right) &= \mu \partial_{xx} v \\ \partial_t(\rho \mathbf{w}) + \partial_x(\rho v \mathbf{w} - a \mathbf{b}) &= \nu \partial_{xx} \mathbf{w} \\ \partial_t \mathbf{b} + \partial_x(v \mathbf{b} - a \mathbf{w}) &= \eta \partial_{xx} \mathbf{b}, \end{aligned} \tag{1.5}$$

wobei  $\mu = \tilde{\mu} + \nu$  mit einem  $\tilde{\mu} > 0$  die longitudinale Viskosität,  $\nu > 0$  die transversale Viskosität und  $\eta > 0$  die elektrische Resistivität bezeichnen.<sup>7</sup>

### 1.4.2 Die Zustandsfunktion

Unter der Zustandsfunktion eines thermodynamischen Systems versteht man im Allgemeinen eine Funktion  $f = f(\rho, T)$ , mit welcher schließlich  $p = f(\rho, T)$  gilt; dabei sind  $p$  der Druck,  $\rho$  die Dichte und  $T$  die absolute Temperatur. Das einfachste Beispiel einer solchen Funktion trifft man bei *idealen Gasen* an:  $f(\rho, T) = R\rho T$  (mit der allgemeinen Gaskonstanten  $R$ ).

Betrachtet man ein isothermes System, so ist die Zustandsfunktion nur noch eine Funktion der Dichte. Ein einfaches Beispiel ist das *barotrope* Gasgesetz (oder auch als  *$\gamma$ -law* bezeichnet)  $p = \pi(\rho)$  mit der Funktion

$$\pi(\rho) := k\rho^\gamma.$$

<sup>7</sup>Aus dieser Beziehung folgt, dass  $\mu = 0$  die Relation  $\nu = 0$  impliziert.

Dabei sind  $k > 0$  und  $\gamma > 1$  stoffabhängige Konstanten.

Die Ergebnisse der vorliegenden Arbeit hängen nicht von der konkreten Form des Gasgesetzes ab, sondern lediglich von einigen Eigenschaften, die man gemeinhin von solchen Funktionen fordert. Wir vereinbaren, dass es sich bei  $\tilde{p}(\rho)$  genau dann um ein *zulässiges Gasgesetz* handelt, wenn  $p(v) := \tilde{p}(m/v)$  diesen Bedingungen genügt:

- $p(v) > 0$  für  $v \in (0, \infty)$ ,  $\lim_{v \rightarrow 0} p(v) = +\infty$ ,  $\lim_{v \rightarrow +\infty} p(v) = 0$ .
- $p'(v) < 0$ .
- $p''(v) > 0$ .

$\tilde{p} = \pi$  ist in diesem Sinne tatsächlich ein zulässiges Gasgesetz.

### 1.4.3 Typische Geschwindigkeiten

Bei späteren Rechnungen treten gelegentlich typische Geschwindigkeiten auf, welche nachfolgend aufgelistet sind.

- Schallgeschwindigkeit  $c_s$ :

$$c_s^2 = \tilde{p}'(\rho) = -\frac{1}{m}v^2 \cdot p'(v).$$

Für  $\tilde{p} = \pi$  ist  $c_s^2 = k\gamma v^{-\gamma+1}$ .

- Alfvén-Geschwindigkeiten  $c_i$  (in Bezug auf eine Komponente  $B_i$  des **B**-Feldes):

$$c_i^2 = \frac{B_i^2}{\rho}.$$

Wir benutzen die Bezeichnungen

$$c_a := c_1 \quad \text{und} \quad c_b := c_2$$

und damit ergibt sich

$$c_a^2 = \frac{a^2}{m}v \quad \text{und} \quad c_b^2 = \frac{b^2}{m}v$$

Mitunter trifft man in der Literatur auch die Bezeichnungen  $c_1 = a_A$  und  $c_2 = \alpha$  an.

- Magnetoakustische Geschwindigkeiten  $c_{\pm}$ : Siehe Abschnitt 3.2 über die Bestimmung der Ruhelagen.

## 2 Topologische und analytische Hilfsmittel

### 2.1 Begriffe und Sätze aus der Theorie der Dynamischen Systeme

Dieser Abschnitt dient dazu, an die üblichen Bezeichnungen und Begrifflichkeiten – vor allem aus der Theorie der dynamischen Systeme – zu erinnern und die verwendeten Propositionen und Theoreme zusammenzutragen. Man findet eine ausführliche Darstellung samt Beweisen etwa in [Tes09].

Wir betrachten ein autonomes System gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$x' = f(x), \quad x \in X \subset \mathbb{R}^n. \quad (*)$$

Dabei nehmen wir an,  $X \subset \mathbb{R}^n$  sei eine offene Menge und das Vektorfeld

$$f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$$

sei lokal Lipschitz-stetig, und bezeichnen mit

$$\Phi : \bigcup_{x \in X} \{x\} \times I_x \rightarrow X$$

den lokalen Fluss von (\*), dessen Existenz und Eindeutigkeit durch die lokale Lipschitz-Stetigkeit von  $f$  garantiert werden, wobei  $I_x \subset \mathbb{R}$  das *maximale Existenzintervall* der im Punkt  $x \in X$  beginnenden Lösungskurve von (\*) bezeichne. Wir benutzen für den Fluss die geläufige Abkürzung

$$x \cdot t := \Phi(x, t),$$

wenn  $x \in X$  und  $t \in I_x$  ist.

Für die Analyse dynamischer Systeme spielen die durch

$$f_j(x) = 0 \quad \text{mit einem } j \in \{1, \dots, n\}$$

definierten Hyperflächen eine wichtige Rolle und sie werden als *Nullclines* oder seltener als *Hauptisoklinen* bezeichnet. Ein Punkt  $x_0 \in X$  heißt *Ruhelage* von  $f$ , wenn

$$f(x_0) = 0$$

gilt; ein solcher Punkt liegt also im Durchschnitt aller Nullclines. Eine Ruhelage  $x_0 \in X$  heißt *hyperbolisch*, wenn die Jacobi-Matrix  $D_x f(x_0)$  des Vektorfeldes  $f$  im Punkt  $x_0$  nur Eigenwerte mit nicht verschwindendem Realteil besitzt.

Als *Orbit*  $\gamma$  durch  $x \in X$  bezeichnet man die Menge

$$\gamma = x \cdot I_x.$$

Ein *vollständiger Orbit*  $\gamma$  ist eine Menge der Form

$$\gamma = x \cdot \mathbb{R} = \{x \cdot t : t \in \mathbb{R}\}$$

mit einem  $x \in X$ , d.h. für dieses  $x$  gilt  $I_x = \mathbb{R}$ .

Für einen Punkt  $x \in X$ , der sich auf dem Orbit  $\gamma$  befindet, definiert man die  $\alpha$ -Limesmenge von  $x$  bzw.  $\gamma$  als

$$\alpha(x) := \bigcap_{t < 0} \text{cl}(x \cdot (-\infty, t))$$

und die  $\omega$ -Limesmenge als

$$\omega(x) := \bigcap_{t > 0} \text{cl}(x \cdot (t, \infty)).$$

Seien  $x_1$  und  $x_2$  verschiedene Ruhelagen von  $(*)$  und es gebe einen vollständigen Orbit  $\gamma$  mit

$$\alpha(\gamma) = \{x_1\} \quad \text{und} \quad \omega(\gamma) = \{x_2\}.$$

Dann sagt man,  $\gamma$  sei *heteroklin* bezüglich der Ruhelagen  $x_1$  und  $x_2$  oder auch  $\gamma$  sei ein *heterokliner Orbit* zwischen den Ruhelagen  $x_1$  und  $x_2$ .

Eine Menge  $S \subset X$  heißt *invariante Menge*, wenn

$$S \cdot \mathbb{R} = S$$

gilt, d.h.  $S$  ist eine Vereinigung vollständiger Orbits. Zum Beispiel sind die  $\alpha$ - und  $\omega$ -Limesmenge eines Punktes abgeschlossene invariante Mengen (siehe [Tes09, Lemma 6.5]).

Seien  $x_0 \in X$  eine hyperbolische Ruhelage von  $(*)$  und das Vektorfeld  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine  $r$ -mal stetig differenzierbare Funktion. Dann existieren  $r$ -mal stetig differenzierbare Mannigfaltigkeiten  $\mathcal{W}_{\text{loc}}^s(x_0)$  und  $\mathcal{W}_{\text{loc}}^u(x_0)$ , die in  $x_0$  tangential an den stabilen bzw. instabilen Raum der Linearisierung verlaufen, und die folgendes Abklingverhalten besitzen: Es gibt ein  $\beta > 0$ , sodass

$$\text{für } x \in \mathcal{W}_{\text{loc}}^s(x_0) : \lim_{t \rightarrow -\infty} e^{\beta t} |x \cdot t - x_0| = 0$$

bzw.

$$\text{für } x \in \mathcal{W}_{\text{loc}}^u(x_0) : \lim_{t \rightarrow -\infty} e^{-\beta t} |x \cdot t - x_0| = 0$$

gilt.

Diese lokalen Mannigfaltigkeiten lassen sich mithilfe des Flusses zu globalen Mannigfaltigkeiten fortsetzen; die *globale stabile Mannigfaltigkeit* wird definiert durch

$$\mathcal{W}^s(x_0) = \bigcup_{t \leq 0} \Phi(t, \mathcal{W}_{\text{loc}}^s(x_0))$$

und die *globale instabile Mannigfaltigkeit* ist gegeben durch

$$\mathcal{W}^u(x_0) = \bigcup_{t \geq 0} \Phi(t, \mathcal{W}_{\text{loc}}^u(x_0)).$$

**Bemerkung 2.1.1.**

Ein Orbit  $\gamma$  ist genau dann heteroklin bezüglich  $x_1$  und  $x_2$ , wenn gilt

$$\gamma \subset \mathcal{W}^u(x_1) \cap \mathcal{W}^s(x_2). \quad \diamond$$

**Definition 2.1.2.**

- (i) Das System (\*) heißt Gradientensystem, wenn es eine differenzierbare Funktion  $V : X \rightarrow \mathbb{R}$  gibt, sodass

$$f(x) = \nabla V(x) \quad \text{für alle } x \in X$$

erfüllt ist. Man bezeichnet die Funktion  $V$  in Anlehnung an die Physik als Potential.

- (ii) Das System (\*) heißt gradientenartig, wenn es eine stetige Funktion  $h : X \rightarrow \mathbb{R}$  gibt, die entlang jedes Orbits von (\*) streng monoton fällt, d.h.  $h$  ist eine (global definierte) strikte Lyapunov-Funktion.

**Bemerkung 2.1.3.**

Offensichtlich ist jedes Gradientensystem auch gradientenartig, denn die Funktion

$$h(x) = -V(x)$$

dient als strikte Lyapunov-Funktion. \(\diamond\)

Besitzt ein System der Gestalt (\*) eine Lyapunov-Funktion, so lassen sich bereits einige Aussagen über die Dynamik folgern.

**Satz 2.1.4.**

Das System (\*) besitze die Lyapunov-Funktion  $h$ .

Dann gilt für jeden beliebigen Punkt  $p \in X$ :

- (i) Besitzt ein  $p$  eine nichtleere  $\alpha$ - oder  $\omega$ -Limesmenge, so ist  $h$  auf dieser Menge konstant.
- (ii) Die  $\alpha$ - und  $\omega$ -Limesmenge einer beschränkten Lösung bestehen nur aus Ruhelagen.
- (iii) Falls die Ruhelagen von (\*) isoliert sind und die durch  $p$  verlaufende Lösung vollständig und beschränkt ist, dann ist diese Lösung konstant oder eine heterokline Verbindung zweier Ruhelagen.

**BEWEIS.** (i) Sei  $\Phi$  der Fluss von (\*). Angenommen, die  $\omega$ -Limesmenge von  $p$  enthält zwei verschiedene Punkte  $x, y$  mit  $h(x) < h(y)$ . Sei  $\delta := h(y) - h(x) > 0$ . Nach Definition der  $\omega$ -Limesmenge und aufgrund der Stetigkeit von  $h$  gibt es Zahlen  $T_1, T_2 \in \mathbb{R}$  mit  $T_1 < T_2$ , sodass

$$h(\Phi(p, T_1)) < h(x) + \delta$$



und

$$h(\Phi(p, T_2)) > h(y) - \delta$$

gilt. Daraus folgt

$$h(\Phi(p, T_1)) < h(x) + \delta < h(y) - \delta < h(\Phi(p, T_2))$$

im WIDERSPRUCH zu der Eigenschaft, dass  $h(\Phi(p, \cdot))$  strikt monoton fällt. Also ist  $h$  konstant auf der  $\omega$ -Limesmenge. Durch Zeitumkehr folgt die gleiche Aussage für die  $\alpha$ -Limesmenge.

- (ii) Sei  $y \in \omega(p)$  und  $\tau \in \mathbb{R}$  beliebig. Weil  $\omega(p)$  eine invariante Menge ist, gilt  $\Phi(y, \tau) \in \omega(p)$ . Nach (i) ist

$$h(\Phi(y, \tau)) = h(y),$$

also ist  $\Phi(y, \tau) = y$  für beliebiges  $\tau \in \mathbb{R}$ . Somit ist  $y$  eine Ruhelage.

- (iii) Die durch  $p$  verlaufende Lösung  $\Phi(p, \cdot)$  ist vollständig und beschränkt, daher existieren die  $\alpha$ - und  $\omega$ -Limesmenge und sind nicht leer. Nach [Tes09, Lemma 6.6] sind diese Mengen zusammenhängend und nach (ii) bestehen sie sämtlich aus Ruhelagen, also gilt

$$\alpha(p) = \{x_1\} \quad \text{und} \quad \omega(p) = \{x_2\},$$

wobei  $x_1$  und  $x_2$  Ruhelagen von (\*) sind.

Falls  $x_1 = x_2$  gilt, so muss die Lösung  $\Phi(p, \cdot)$  aufgrund der Monotonie von  $h$  überhaupt konstant sein und es folgt  $x_1 = x_2 = p$ . Andernfalls ist  $\Phi(p, \cdot)$  heteroklin bezüglich  $x_1$  und  $x_2$ . ■

## 2.2 Direkte Existenzsätze für heterokline Orbits

Wir formulieren einige Sätze über die Existenz heterokliner Orbits, wie sie in der Dissertation [Hes84] von M. Hesaaraki zu finden sind. Im Gegensatz zu den topologischen Methoden, die in den Abschnitten 2.3 und 2.4 dargestellt werden, sind die Aussagen in diesem Abschnitt direkter Natur, d.h. unter gewissen Annahmen an die Ruhelagen und den Fluss werden Eigenschaften des Flusses nachgewiesen, welche dann zwingend zur Existenz eines Orbits führen.

Wir betrachten in diesem Abschnitt die autonome Differentialgleichung

$$x' = f(x) \tag{2.1}$$

auf dem  $\mathbb{R}^n$  mit einer glatten Funktion  $f$ .

Es wird die folgende Bezeichnung von M. Hesaaraki wie in [Hes84] benutzt: Eine Menge  $D \subset \mathbb{R}^n$  heißt *präkompakt*, wenn  $D$  offen und  $\text{cl}(D)$  kompakt ist.

**Theorem 2.2.1.**

Seien  $f$  lokal Lipschitz-stetig in einem Gebiet  $U \subset \mathbb{R}^n$ ,  $D$  präkompakt mit  $\text{cl}(D) \subset U$  und (2.1) ein gradientenartiges System in  $D$  bezüglich  $h$ . Weiter besitze (2.1) in  $U$  genau zwei Ruhelagen  $x_0, x_1 \in \partial D$  mit  $h(x_0) > h(x_1)$ . Außerdem seien die beiden folgenden Bedingungen erfüllt:

$C_1$ : Für jedes  $p \in \partial D - \{x_0, x_1\}$  gilt

$$p \cdot t \notin \text{cl}(D)$$

für kleine positive  $t > 0$  und

$$p \cdot t \notin \partial D$$

für  $|t| \neq 0$  klein.

$C_2$ : Für eine Konstante  $0 < b < h(x_0) - h(x_1)$  bezeichne  $D_b$  diejenige Komponente von

$$\{x \in \text{cl}(D) : h(x) \leq h(x_1) + b\},$$

die den Punkt  $x_1$  enthält, und

$$M_b := \{x \in D_b : h(x) = h(x_1) + b\}.$$

Es gebe eine Konstante  $0 < b < h(x_0) - h(x_1)$ , sodass

$$M_b \cap D \neq \emptyset$$

gilt.

Dann besitzt (2.1) einen Orbit  $x_0 \rightarrow x_1$  in  $D$ .

**BEWEIS. 1. SCHRITT:** Wir zeigen  $M_b \cap D \subset W^u(x_0)$ . Der Orbit  $\gamma$  durch  $p \in M_b \cap D$  ist – aufgrund der Kompaktheit von  $\text{cl}(D)$  – für alle  $t \leq 0$  definiert und muss seine  $\alpha$ -Limesmenge  $\alpha(\gamma)$  in  $\text{cl}(D)$  haben, weil  $\gamma$  nirgends  $\text{cl}(D)$  verlassen kann. Da (2.1) ein gradientenartiges System ist, muss  $\alpha(\gamma)$  eine Ruhelage in

$$\text{cl}(D) \cap \{h(x) \geq h(x_1) + b\}$$

sein; also ist  $\alpha(\gamma) = \{x_0\}$ .

**2. SCHRITT:** Die Menge

$$E := \{x \in M_b \cap D : x \cdot [0, \infty) \subset D\}$$

ist nicht leer.

**Teilschritt A:** Annahme des Gegenteils der Behauptung.

Angenommen, sie wäre es; d.h. für jedes  $p \in M_b$  gibt es ein  $t > 0$ , sodass  $p \cdot t \notin \text{cl}(D)$ . Setze

$$\tau(p) = \sup\{t \geq 0 : p \cdot [0, t) \subset D\}.$$

$\tau(p)$  erfüllt also

$$p \cdot [0, \tau(p)) \subset D \quad \text{und} \quad p \cdot (\tau(p) + \varepsilon) \notin \text{cl}(D)$$

für  $\varepsilon > 0$  klein.

Andererseits folgt für  $p \in M_b \cap D$  und kleines  $\varepsilon > 0$  aus der Relation

$$p \cdot [0, \tau(p) - \varepsilon] \subset D$$

(aufgrund der Stetigkeit von  $\Phi$ ) die Relation

$$q \cdot [0, \tau(p) - \varepsilon] \subset D$$

für solche  $q$ , die genügend nah bei  $p$  liegen, also gilt

$$\tau(q) > \tau(p) + \varepsilon.$$

**Teilschritt B:** *Behauptung:*  $\tau : M_b \rightarrow \partial D_b, p \mapsto \tau(p)$  ist stetig.

Sei  $p \in M_b$  und  $\varepsilon > 0$ . Es existiert ein  $0 < \varepsilon_0 < \varepsilon$  mit

$$p \cdot (\tau(p), \tau(p) + \varepsilon_0) \subset U \setminus \text{cl}(D).$$

Weil  $U \setminus \text{cl}(D)$  offen und der Fluss  $\Phi$  stetig ist, gilt

$$q \cdot (\tau(p) + \varepsilon_0) \in U \setminus \text{cl}(D)$$

für solche  $q$ , die genügend nah bei  $p$  liegen, also gilt

$$\tau(q) < \tau(p) + \varepsilon_0.$$

**Teilschritt C:** *Behauptung:* Falls es Folgen  $p_n \in D$  mit  $p_n \rightarrow x_1$  und  $q_n \in M := M_b$  gibt, sodass  $q_n \cdot t_n = p_n$ , dann wächst  $\tau(q_n)$  unbeschränkt.

Sei  $|x(t_1) - x_1| = \delta_k$  und  $|x(t_2) - x_1| = \delta_{k+1}$ . Dann gilt

$$|x(t_1) - x(t_2)| = |x'(t)| |t_1 - t_2| = |f(x(t))| |t_1 - t_2| \leq c |x(t) - x_1| |t_1 - t_2| \leq c \delta_k |t_1 - t_2|$$

und weiter

$$|x(t_1) - x(t_2)| \geq |x(t_1) - x_1| - |x(t_2) - x_1| = \delta_k - \delta_{k+1} = \frac{\delta_k}{2},$$

also

$$|t_1 - t_2| \geq \frac{c}{2} > 0.$$

Bezeichne  $T(p_i, p_j)$  die Zeit, die man benötigt, um entlang eines festen Orbits von  $p_i$  zu  $p_j$  zu gelangen. Es bezeichne  $q_n^{(i)}$  einen Punkt von  $q_n \cdot \mathbb{R}$  mit  $\left|q_n^{(i)} - x_1\right| = \frac{\delta}{2^i}$ . Dann gilt

$$\tau(q_n) \geq T(q_n, q_n^{(1)}) + \underbrace{T(q_n^{(1)}, q_n^{(2)}) + \cdots + T(q_n^{(n-1)}, q_n^{(n)})}_{\geq (n-1)c} + T(q_n^{(n)}, p_n)$$

und diese Folge ist bestimmt divergent gegen  $+\infty$ .

**Teilschritt D:** *Der Widerspruch.*

Die Funktion  $\tau(p)$  ist nach dem Teilschritt B stetig in  $M$  und  $M$  ist als abgeschlossene Teilmenge der kompakten Menge  $\text{cl}(D)$  ebenfalls kompakt. Somit ist  $\max_{x \in M} \tau(x) < \infty$ .

Das widerspricht aber der in Teilschritt C bewiesenen Aussage. Also gilt  $E \neq \emptyset$ .

**3. SCHRITT:** *Abschluss des Beweises.*

Nach dem zweiten Schritt gibt es ein  $p \in E$ . Dann ist  $p \cdot t$  für alle  $t \in \mathbb{R}$  definiert und der Orbit muss in  $D$  verbleiben, der  $\alpha$ -Limes ist  $\{x_0\}$  und der  $\omega$ -Limes muss  $\{x_1\}$  sein. Also existiert ein Orbit  $x_0 \rightarrow x_1$ . ■

Der folgende Satz besagt, dass sich die Existenz heterokliner Orbits auch auf „benachbarte“ Vektorfelder überträgt. Bei dieser Aussage handelt es sich um eine Folgerung aus der gutartigen Abhängigkeit der Lösung einer Differentialgleichung von Parametern.

**Satz 2.2.2.**

Sei  $f_m$  eine Folge von Vektorfeldern für  $m \in \mathbb{N}$  in einem beschränkten Gebiet  $D \subset \mathbb{R}^n$ , sodass

$$|f_m(x) - f(x)| \leq \varepsilon_m \quad \forall x \in D$$

mit einem geeigneten gradientenartigen, gleichmäßig Lipschitz-stetigen Vektorfeld  $f$  in  $\text{cl}(D)$  und einer positiven reellen Nullfolge  $(\varepsilon_m)_{m \in \mathbb{N}}$ . Es gebe zu jedem  $m \in \mathbb{N}$  einen heteroklinen Orbit  $\gamma_m(t)$  von  $x' = f_m(x)$ , der die Punkte  $x_1^{(m)}, x_2^{(m)} \in D$  verbindet, und es gelte

$$\lim_{m \rightarrow \infty} x_{1,2}^{(m)} = x_{1,2}.$$

Gilt  $x_1 \neq x_2$  und hat  $f$  nur endlich viele Ruhelagen in  $\text{cl}(D)$ , dann existiert ein heterokliner Orbit für  $x' = f(x)$ , der die Punkte  $x_1, x_2$  in  $\text{cl}(D)$  verbindet.

BEWEIS. Siehe [Hes84, Theorem 3.1.1]. ■

## 2.3 Conley-Index-Theorie

### 2.3.1 Vorbereitung: Topologische Grundbegriffe

Der Conley-Index wurde zuerst von C. Conley (siehe [Con78]) als Äquivalenzklasse homotopieäquivalenter punktierter topologischer Räume definiert. Diese Definition soll im vorliegenden Abschnitt präsentiert werden. Zu diesem Zweck werden werden im

aktuellen Unterabschnitt die nötigen Bezeichnungen aus der Topologie bereitgestellt, die man umfassender etwa in [Jän05] oder [Mun84] findet.

**Definition 2.3.1.**

- (i) Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $x_0 \in X$ . Das Paar  $(X, x_0)$  bezeichnet man als punktierten topologischen Raum (oder kürzer als punktierten Raum).
- (ii) Unter einer stetigen Abbildung punktierter Räume  $(X, x_0)$  und  $(Y, y_0)$  versteht man eine stetige Abbildung

$$f : X \rightarrow Y,$$

die

$$f(x_0) = y_0$$

erfüllt; in dieser Situation schreibt man kurz:

$$f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0).$$

- (iii) Seien  $f_0, f_1 : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$  stetige Abbildungen topologischer Paare. Man nennt  $f_0$  und  $f_1$  homotop und schreibt  $f_0 \simeq f_1$ , wenn es eine stetige Abbildung

$$F : (X, x_0) \times [0, 1] \rightarrow (Y, y_0)$$

gibt, sodass

$$f_t : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0), x \mapsto F(x, t)$$

für jedes  $t \in [0, 1]$  eine stetige Abbildung punktierter Räume ist und  $F(x, 0) = f_0(x)$  und  $F(x, 1) = f_1(x)$  für alle  $x \in X$  gelten.

- (iv) Man nennt die punktierten Räume  $(X, x_0)$  und  $(Y, y_0)$  homotopieäquivalent und schreibt  $(X, x_0) \sim (Y, y_0)$ , wenn es Abbildungen

$$f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0) \quad \text{und} \quad g : (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$$

gibt, sodass

$$g \circ f \simeq \text{Id}_{(X, x_0)} \quad \text{und} \quad f \circ g \simeq \text{Id}_{(Y, y_0)}$$

gilt.

- (v) Quotientenraum. Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $A \subset X$  ein abgeschlossener Teilraum. Die Relation

$$x \sim y \quad :\iff \quad x = y \text{ oder } x, y \in A$$

definiert eine Äquivalenzrelation auf  $X$ . Die Menge der Äquivalenzklassen  $X / \sim$  kann durch die Forderung, dass die natürliche Projektion

$$\pi : X \rightarrow X / \sim, x \mapsto [x],$$

stetig sein soll, mit einer Topologie versehen werden. Unter dem Quotientenraum  $X / A$  versteht man den punktierten Raum  $(X / \sim, [A])$ .

- (vi) Unter der Summe  $X \vee Y$  (oder auch Wedge-Summe) der punktierten Räume  $(X, x_0)$  und  $(Y, y_0)$  versteht man den punktierten Raum

$$X \times \{y_0\} \cup \{x_0\} \times Y \subset X \times Y,$$

versehen mit dem ausgezeichneten Punkt  $(x_0, y_0) \in X \times Y$ .

**Bemerkung 2.3.2.**

- (i) Es lässt sich zeigen, dass es sich bei der Homotopie stetiger Abbildungen und bei der Homotopieäquivalenz punktierter Räume um Äquivalenzrelationen handelt. Entsprechend benutzt man für die zugehörigen Äquivalenzklassen die Schreibweise  $[f]$  bzw.  $[X, x_0]$ .
- (ii) Wir benutzen die Bezeichnungen

$$\bar{0} := [\{x_0\}, x_0]$$

für die Homotopieklasse des einpunktigen punktierten Raumes und

$$\Sigma^k := [S^k, x_0]$$

(mit einem  $x_0 \in S^k$ ) für die Homotopieklasse der punktierten  $k$ -Sphäre.  $\diamond$

Für Referenzzwecke notieren wir in der nachfolgenden Proposition die Bemerkung, dass  $\Sigma^k \neq \bar{0}$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  gilt.

**Satz 2.3.3.**

Für jedes  $k \in \mathbb{N}$  gilt:  $\Sigma^k \neq \bar{0}$ .

BEWEIS. Für einen kurzen Beweis mittels Homologie-Gruppen: siehe [Mun84].  $\blacksquare$

**Satz 2.3.4.**

Seien  $X/A$  und  $Y/B$  Quotientenräume, für die

$$X/A \vee Y/B = \bar{0} \tag{2.2}$$

gilt, so folgt

$$X/A = \bar{0} \quad \text{und} \quad Y/B = \bar{0}.$$

BEWEIS. Aufgrund der Relation 2.2 gibt es eine stetige Abbildung

$$F : (X/A \vee Y/B) \times [0, 1] \rightarrow X/A \vee Y/B$$

mit den Eigenschaften

$$F(z, 0) = z \quad \text{und} \quad F(z, 1) = [A] \times [B] \quad \text{für alle } z \in X/A \vee Y/B.$$

Durch Komposition dieser Abbildung mit den stetigen Abbildungen

$$k : X/A \vee Y/B \rightarrow X/A,$$

der Projektion auf den ersten Faktor, und

$$j : X/A \rightarrow X/A \vee Y/B,$$

der natürlichen Einbettung, ergibt sich eine stetige Abbildung

$$\tilde{F} : X/A \times [0, 1] \rightarrow X/A, (z, t) \mapsto k(F(j(z), t))$$

welche

$$F(z, 0) = z \quad \text{und} \quad F(z, 1) = [A] \quad \text{für alle } z \in X/A$$

erfüllt; d.h. es gilt  $X/A = \bar{0}$ . Für den zweiten Teil der Behauptung verfährt man analog. ■

**Folgerung 2.3.5.**

Für beliebige Zahlen  $i, j \in \mathbb{N}$  gilt

$$\Sigma^i \vee \Sigma^j \neq \bar{0}.$$

BEWEIS. Angenommen, es gelte

$$\Sigma^i \vee \Sigma^j = \bar{0},$$

dann impliziert der vorangehende Satz 2.3.4, dass

$$\Sigma^i = \bar{0} \quad \text{und} \quad \Sigma^j = \bar{0}$$

gelten – im WIDERSPRUCH zu Satz 2.3.3. ■

### 2.3.2 Der Conley-Index und Eigenschaften

Isolierende Umgebungen und isolierte invariante Mengen

Wir kehren zur Betrachtung der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$x' = f(x), \quad x \in X \subset \mathbb{R}^n, \quad (*)$$

wie zu Beginn des Abschnitts zurück.

**Definition 2.3.6.**

- (i) Der Abschluss einer beschränkten, offenen Teilmenge  $N \subset X$  heißt isolierende Umgebung für  $f$ , wenn

$$\forall x \in \partial N \exists t \in \mathbb{R} : x \cdot t \notin N$$

erfüllt ist.

- (ii) Eine invariante Menge  $S$  heißt isolierte invariante Menge, wenn sie die maximale invariante Menge einer geeigneten isolierenden Umgebung ist.

In dieser Situation schreiben wir

$$S = \text{inv } N,$$

wobei  $\text{inv } N$  die maximale invariante Menge von  $N$  bezeichne.

Wir geben im nachfolgenden Beispiel zwei typische Situationen an.

**Beispiel 2.3.7.**

- (a)  $S = \{x_0\}$  mit einer hyperbolischen Ruhelage  $x_0$  von  $(*)$  ist eine isolierte invariante Menge. Als isolierende Umgebung  $N$  dient etwa jede offene Kugel um  $x_0$ , die keine weitere Ruhelage enthält.
- (b)  $S = \{x_0\}$  mit einem Zentrum  $x_0$  von  $(*)$  ist **keine** isolierte invariante Menge, denn jede (noch so kleine) Umgebung  $N$  von  $x_0$  enthält einen periodischen Orbit, und somit ist  $S \neq \text{inv } N$ . ◇

Besonderes Interesse gilt den isolierten invarianten Mengen, weil sie (in einem näher zu präzisierenden Sinne) stabil unter Störungen der Differentialgleichung sind, d.h. Aussagen über isolierte invariante Mengen lassen sich auf (in einer geeigneten Topologie) „benachbarte“ Differentialgleichungen übertragen. Wegen genau dieser Eigenschaft sind isolierte invariante Mengen so wertvoll für Anwendungen, und insbesondere für das hier präsentierte Problem der Schockwellen in der Magnetohydrodynamik. Leider ist die Bestimmung von Eigenschaften isolierter invarianter Mengen in vielen Fällen schwierig, weshalb man sehr daran interessiert ist, aus Eigenschaften der rechnerisch leichter zugänglichen isolierenden Umgebungen auf Eigenschaften der isolierten invarianten Mengen zu schließen.

**Isolierende Blöcke**

Zur Definition des Conley-Index werden aus technischen Gründen spezielle isolierende Umgebungen, sogenannte *isolierende Blöcke*, benötigt; diese haben – grob gesagt – die Eigenschaft, dass innerhalb des isolierenden Blocks beginnende Orbits, die auf den Rand einer solchen Umgebung treffen, diesen auch passieren müssen. Der Präzisierung dieser Bedingung und dem Nachweis einiger Eigenschaften von isolierenden Blöcken dient der vorliegende Unterabschnitt.

**Definition 2.3.8.**

Sei  $S \subset X$ . Zu  $\delta > 0$  definiere

$$h_\delta : S \times (-\delta, \delta) \rightarrow X, x \mapsto x \cdot t.$$

Falls  $h_\delta$  für ein  $\delta > 0$  ein Homöomorphismus mit offenem Bild in  $X$  ist, dann nennt man  $S$  einen lokalen Schnitt.

**Bemerkung 2.3.9.**

Ist  $S$  ein lokaler Schnitt und  $x \in S \cdot (-\delta, \delta)$ , dann gibt es genau ein  $t \in \mathbb{R}, |t| < \delta$  mit  $x \cdot t \in S$ . ◇

**Definition 2.3.10.**

Sei  $B$  der Abschluss einer offenen Menge in  $X$  und  $S^\pm$  seien disjunkte lokale Schnitte, die folgende Eigenschaften erfüllen:

- (i)  $(\text{cl}(S^\pm) \setminus S^\pm) \cap B = \emptyset$



- (ii)  $S^- \cdot (-\delta, \delta) \cap B = (S^- \cap B) \cdot [0, \delta)$
- (iii)  $S^+ \cdot (-\delta, \delta) \cap B = (S^+ \cap B) \cdot (-\delta, 0]$
- (iv) Ist  $x \in \partial B \setminus (S^+ \cup S^-)$ , dann gibt es Zahlen  $\varepsilon_1 < 0 < \varepsilon_2$ , sodass  $x \cdot [\varepsilon_1, \varepsilon_2] \subset \partial B$  sowie  $x \cdot \varepsilon_1 \in S^-$  und  $x \cdot \varepsilon_2 \in S^+$  erfüllt sind.

Unter diesen Voraussetzungen nennt man  $B$  einen isolierenden Block (oder kurz: Block) für den Fluss  $\Phi$ .

Handelt es sich bei  $B$  um einen Block, dann definieren wir die folgenden Mengen:

$$\begin{aligned} b &= \partial B \\ b^+ &= B \cap S^+ \subset b \\ b^- &= B \cap S^- \subset b \end{aligned}$$

C. Conley hat in [Con78] für die Mengen  $b^+$  und  $b^-$  die Bezeichnungen *Austrittsmenge* bzw. *Eintrittsmenge* eingeführt, die durch das nachfolgende Lemma gerechtfertigt werden.

**Lemma 2.3.11.**

Seien  $S^\pm$  lokale Schnitte bezüglich des Parameters  $\delta > 0$  und  $B$  erfülle mit diesen  $S^\pm$  die Definition 2.3.10 eines isolierenden Blockes. Dann gilt:

- (i) Für jedes  $x \in S^- \cap B$  gibt es ein  $\varepsilon > 0$ , sodass  $x \cdot (-\varepsilon) \notin B$  und  $x \cdot \varepsilon \in B$ .
- (ii) Für jedes  $x \in S^+ \cap B$  gibt es ein  $\varepsilon > 0$ , sodass  $x \cdot (-\varepsilon) \in B$  und  $x \cdot \varepsilon \notin B$ .

BEWEIS. (i) Sei  $\varepsilon \in (0, \delta)$  beliebig gewählt. Es gilt

$$x \cdot \varepsilon \in S^- \cdot (-\delta, \delta) \quad \text{und} \quad x \cdot \varepsilon \in (S^- \cap B) \cdot [0, \delta),$$

also nach Definition 2.3.10 (ii):  $x \cdot \varepsilon \in B$ .

Ferner gilt  $x \cdot (-\varepsilon) \in S^- \cdot (-\delta, \delta)$ . Angenommen, es gälte  $x \cdot (-\varepsilon) \in B$ ; daraus folgt nach Definition 2.3.10 (ii):

$$\exists x' \in S^- \cap B, \varepsilon' \in [0, \delta) : x \cdot (-\varepsilon) = x' \cdot \varepsilon'.$$

Aufgrund der Bijektivität des nach Definition 2.3.8 zu  $S^-$  gehörigen Homöomorphismus gelten  $x = x'$  und  $-\varepsilon = \varepsilon'$ ; die letzte Identität ist aber absurd.

(ii) Analog zu (i). ■

Insbesondere zeigt dieses Lemma, dass  $S^\pm \cap B$  Teilmengen des Randes  $\partial B$  sind, was wir als Folgerung notieren.

**Folgerung 2.3.12.**

Es gilt:  $S^\pm \cap B \subset \partial B$ .

Wir weisen als nächstes nach, dass es sich bei den isolierenden Blöcken tatsächlich um spezielle isolierende Umgebungen handelt, wie es in der Einleitung behauptet wurde.

**Satz 2.3.13.**

*Isolierende Blöcke sind isolierende Umgebungen.*

BEWEIS. Ist  $x \in \partial B$ , dann trifft der Orbit durch  $x$  nach Eigenschaft (iv) in Definition 2.3.10 eine der Mengen  $S^\pm$  und mit Lemma 2.3.11 folgt die Existenz eines  $t \in \mathbb{R}$ , sodass  $x \cdot t \notin B$  gilt; d.h.  $B$  ist eine isolierende Umgebung. ■

Wir formulieren nun das erste wichtige Resultat über isolierende Blöcke, welches es erlaubt, sich auf die Betrachtung isolierender Blöcke anstelle beliebiger isolierender Umgebungen zurückzuziehen.

**Theorem 2.3.14.**

*Jede Umgebung einer isolierten invarianten Menge enthält einen isolierenden Block.*

BEWEIS. Siehe [Smo94, Chapter 22, Theorem 22.18, S. 468]. ■

Das zweite wichtige Resultat über isolierende Blöcke dient dem Nachweis der Wohldefiniertheit des Conley-Index.

**Theorem 2.3.15.**

*Seien  $B_1$  und  $B_2$  Blöcke für die isolierte invariante Menge  $S$ .*

*Dann gilt*

$$B_1/b_1^+ \sim B_2/b_2^+ \quad \text{und} \quad B_1/b_1^- \sim B_2/b_2^-.$$

BEWEIS. Siehe [Smo94, Chapter 22, Theorem 22.29, S. 475]. ■

**Definition des Conley-Index****Definition 2.3.16.**

*Seien  $S$  eine isolierte invariante Menge. Dann definieren wir den Conley-Index von  $S$ ,*

$$h(S) := [B/b^+, [b^+]],$$

*als die Homotopieklasse des punktierten Raumes  $(B/b^+, [b^+])$ , wobei  $B$  ein beliebiger isolierender Block für  $S$  sei.*

**Bemerkung 2.3.17.**

- (i) Sei  $B$  ein beliebiger isolierender Block für  $S$ . Nach den Resultaten über isolierende Blöcke im vorangehenden Abschnitt ist der Conley-Index wohldefiniert und unabhängig von der speziellen Wahl des Blockes  $B$ ; denn: nach der Definition 2.3.6 existiert für  $S$  eine isolierende Umgebung, welche nach Theorem 2.3.14 einen isolierenden Block  $B'$  enthält. Aufgrund von Theorem 2.3.15 sind die punktierten Räume  $(B/b^+, [b^+])$  und  $(B'/b'^+, [b'^+])$  in der gleichen Homotopieklasse enthalten, d.h. der Conley-Index ist wohldefiniert.
- (ii) Der Conley-Index einer isolierten invarianten Menge wurde von C. Conley in der Form, die in Definition 2.3.16 formuliert ist, als Homotopieklasse angegeben.

Da sich Gruppen leichter behandeln lassen als Homotopie-Klassen topologischer Räume und weil die algebraische Topologie bereits unzählige raffinierte Werkzeuge bereitstellt, betrachtet man häufig vom eigentlichen Conley-Index abgeleitete Objekte, z.B. den *kohomologischen* bzw. *homologischen* Conley-Index  $H_*(h(S))$  bzw.  $H^*(h(S))$  (wobei  $H_*$  bzw.  $H^*$  geeignete (Ko-)Homologiefunktoren bezeichnen). Aufgrund der Homotopie-Invarianz von Kohomologie und Homologie sind diese algebraischen Indices *per se* wohldefiniert.  $\diamond$

Der folgende Satz bestimmt den Conley-Index für den einfachen Fall einer hyperbolischen Ruhelage.

**Satz 2.3.18.**

Sei  $x_0 \in X$  eine hyperbolische Ruhelage von  $(*)$  und die Linearisierung bei  $x_0$  besitze nur reelle Eigenwerte, unter denen sich genau  $k$  positive Eigenwerte befinden. Dann ist der Conley-Index

$$h(\{x_0\}) = \Sigma^k.$$

BEWEIS. **1. SCHRITT:** Die Linearisierung.

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  bezeichne die Linearisierung von  $f$  beim Punkte  $x_0$ , d.h. es gilt  $A = Df(x_0)$ ; aufgrund der Hyperbolizität ist  $A$  diagonalisierbar mit den Eigenwerten

$$\lambda_1 < \dots < \lambda_{n-k} < 0 < \lambda_{n-k+1} < \dots < \lambda_n.$$

Wir nehmen daher ohne Einschränkung an, das System sei in einer Eigenbasis gegeben. In einer Umgebung der Ruhelage lässt sich die Differentialgleichung  $(*)$  in der folgenden Form

$$\begin{aligned} x'_- &= A_- x_- + \mathcal{O}(|x|^2) \\ x'_+ &= A_+ x_+ + \mathcal{O}(|x|^2) \end{aligned}$$

mit  $x = (x_-, x_+) \in V_- \oplus V_+ = \mathbb{R}^n$  schreiben; dabei ist  $V_-$  bzw.  $V_+$  die Summe der Eigenräume zu den negativen bzw. positiven Eigenwerten und  $A_-$  bzw.  $A_+$  sind Diagonalmatrizen, auf deren Hauptdiagonale die negativen bzw. positiven Eigenwerte von  $A$  stehen. Letzteres impliziert die Gültigkeit der Relationen

$$\langle A_- x_-, x_- \rangle < 0 \quad \text{für alle } x_- \in V_- \setminus \{0\}$$

und

$$\langle A_+ x_+, x_+ \rangle > 0 \quad \text{für alle } x_+ \in V_+ \setminus \{0\}.$$

**2. SCHRITT:** Konstruktion des Blockes  $B$ .

Für  $\varepsilon > 0$  sei

$$B_\varepsilon := \{x \in \mathbb{R}^n : |x_-| \leq \varepsilon, |x_+| \leq \varepsilon\};$$

dann ist

$$\partial B_\varepsilon := \{x \in B_\varepsilon : |x_-| = \varepsilon \text{ oder } |x_+| = \varepsilon\}.$$

Für ein  $x \in \partial B_\varepsilon$  mit  $|x_-| = \varepsilon$  gilt nun:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} |x_-|^2 \right) &= \langle x_-, x'_- \rangle \\ &= \langle x_-, A_- x_- \rangle + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \\ &= \varepsilon^2 \left\langle \frac{x_-}{|x_-|}, A_- \frac{x_-}{|x_-|} \right\rangle + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \\ &= -\varepsilon^2 |x_-|^2 |\langle x_-, A_- x_- \rangle| + \mathcal{O}(\varepsilon^3). \end{aligned}$$

Falls  $\varepsilon > 0$  klein genug ist, gilt also

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} |x_-|^2 \right) < 0 \quad \text{für alle } x_- \in \partial B_\varepsilon \cap \{|x_-| = \varepsilon\}$$

und auch

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} |x_+|^2 \right) > 0 \quad \text{für alle } x_+ \in \partial B_\varepsilon \cap \{|x_+| = \varepsilon\},$$

wie man anhand einer analogen Rechnung bestätigt.

Für ein hinreichend kleines  $\varepsilon > 0$  setzen wir  $B := B_\varepsilon$ .

**3. SCHRITT:**  $B$  ist ein isolierender Block.

Das Vektorfeld durchdringt die Hyperebenen  $E_i := \{\langle x - \varepsilon e_i, e_i \rangle = 0\}$  innerhalb der Menge  $B_\varepsilon$  transversal (und somit auch die Mengen  $S^\pm$ ); denn in einem beliebigen Punkt  $x \in E_i$  ist ein Normalenvektor an  $E_i$  durch  $e_i$  gegeben. Daher gilt

$$\text{für } x = \sum_{j=1}^n \alpha_j e_j : \langle x', e_i \rangle = \langle Ax + \mathcal{O}(|x|^2), e_i \rangle = \lambda_i \alpha_i + \mathcal{O}(|x|^2),$$

wobei wegen  $x \in E_i$  außerdem  $\alpha_i = \varepsilon$  gilt. Für  $x \in B_\varepsilon$  gilt folglich

$$\langle x', e_i \rangle = \varepsilon \lambda_i + \mathcal{O}(\varepsilon^2),$$

also ist wegen  $\lambda_i \neq 0$  auch  $\langle x', e_i \rangle \neq 0$ , falls  $\varepsilon$  klein genug ist. Damit ist die behauptete Transversalität gezeigt.

Zusammen mit der lokalen Diffeomorphie des Phasenflusses erkennt man die abgeschlossenen Mengen  $S^\pm = \{|x_\pm| = \varepsilon\}$  als lokale Schnitte. Ebenfalls aufgrund der Transversalität überprüft man (ii) und (iii) der Definition 2.3.10; aufgrund der Abgeschlossenheit von  $S^\pm$  und wegen  $\partial B_\varepsilon = S^+ \cup S^-$  sind die Punkte (i) und (iv) trivial.

**4. SCHRITT:** Berechnung des Conley-Index.

Mit dem Ergebnis des 3. Schritts lässt sich der Conley-Index nun explizit bestimmen.

$$\begin{aligned} B &= \{|x_-| \leq \varepsilon\} \times \{|x_+| \leq \varepsilon\} \\ b^+ &= B \cap S^+ = \{|x_-| \leq \varepsilon\} \times \{|x_+| = \varepsilon\} \end{aligned}$$

Somit folgt

$$h(\{x_0\}) = B/b^+ \sim B^k/\partial B^k \sim S^k,$$

also  $h(\{x_0\}) = \Sigma^k$ . ■

**Bemerkung 2.3.19.**

- (i) Der vorangehende Satz wurde zwar nur für den Fall reeller Eigenwerte bewiesen, gilt aber ebenso wenn man komplexe Eigenwerte mit nichtverschwindendem Realteil zulässt.
- (ii) Der soeben bewiesene Satz zeigt, inwiefern es beim Conley-Index um eine Verallgemeinerung des Morse-Index handelt. Im Falle der hyperbolischen Ruhelage eines Gradientensystems mit genau  $k$  positiven Eigenwerten ist der (klassische) Morse-Index gleich  $k$  und der (topologische) Morse-Index ist  $\Sigma^k$  (vgl. [Smo94, Chapter 12.§C]); d.h. Morse-Index und Conley-Index stimmen überein. Jedoch ist der Conley-Index wesentlich allgemeiner, denn er ist für beliebige isolierte invariante Mengen (und nicht nur Ruhelagen) definiert. ◇

**Theorem 2.3.20.**

Sind  $S_1$  und  $S_2$  disjunkte isolierte invariante Mengen, dann ist auch  $S = S_1 \cup S_2$  eine isolierte invariante Menge und es gilt

$$h(S_1 \cup S_2) = h(S_1) \vee h(S_2).$$

BEWEIS. Seien  $B_1$  und  $B_2$  disjunkte isolierende Blöcke für  $S_1$  bzw.  $S_2$ . Dann definiert

$$B := B_1 \cup B_2$$

einen isolierenden Block für  $S$  und es gilt

$$B/b^+ = B_1/b_1^+ \vee B_2/b_2^+.$$

Die Äquivalenzklassen hängen nicht von der konkreten Wahl von  $B_1$  und  $B_2$  ab; also gilt die Behauptung. ■

**Theorem 2.3.21.**

Sei  $N$  eine isolierende Umgebung für die isolierte invariante Menge  $S$ .

Falls

$$h(S) \neq \bar{0},$$

dann ist

$$S \neq \emptyset.$$

BEWEIS. Für  $S = \emptyset$  gilt  $h(S) = \bar{0}$ ; die Kontraposition dieser Aussage ist die Behauptung. ■

**Bemerkung 2.3.22.**

Unter den Voraussetzungen des Theorems besitzt also  $N$  einen vollständigen Orbit; dieser kann durchaus konstant sein.  $\diamond$

Wir formulieren schließlich das im vorliegenden Kontext wichtigste Theorem über die Existenz heterokliner Orbits.

**Theorem 2.3.23.**

Das System (\*) sei gradientenartig und die isolierende Umgebung  $N$  enthalte genau zwei hyperbolische Ruhelagen  $x_1, x_2$  von  $f$ . Gilt für die maximale invariante Menge  $S = \text{inv } N$  in  $N$

$$h(S) = \bar{0}, \quad (2.3)$$

dann gibt es einen vollständigen heteroklinen Orbit, der die beiden Ruhelagen verbindet.

**BEWEIS. 1. SCHRITT:** Es genügt zu zeigen, dass  $S$  neben den konstanten Orbits  $\{x_1\}$  und  $\{x_2\}$  einen weiteren Orbit  $\gamma$  enthält. Aufgrund der Existenz einer strikten Lyapunov-Funktion muss  $\gamma$  dann die beiden einzigen Ruhelagen miteinander verbinden.

**2. SCHRITT:** Angenommen, es gelte  $S = \{x_1, x_2\}$ . Dann gilt nach Theorem 2.3.20

$$h(S) = h(\{x_1\}) \vee h(\{x_2\}),$$

also folgt mit Satz 2.3.4 aus der Annahme (2.3), dass

$$h(\{x_1\}) = \bar{0} \quad \text{und} \quad h(\{x_2\}) = \bar{0}$$

gelten. WIDERSPRUCH zu Satz 2.3.3.  $\blacksquare$

**Die Fortsetzungseigenschaft**

Statt einer einzelnen Differentialgleichung betrachten wir jetzt eine Familie von Differentialgleichungen

$$x' = f_\lambda(x), \quad x \in X \subset \mathbb{R}^n, \lambda \in \Lambda$$

mit einem wegzusammenhängenden Parameterraum  $\Lambda$ .

**Definition 2.3.24.**

Sei  $N \subset X$  kompakt und  $S_\lambda$  bezeichne die maximale invariante Menge in  $N$  für  $f_\lambda$ . Seien  $\lambda_0, \lambda_1 \in \Lambda$  und  $\gamma$  ein Weg von  $\lambda_0$  nach  $\lambda_1$ . Wir nennen die Familie

$$\{S_\lambda\}_{\lambda \in \gamma}$$

isolierter invarianter Mengen eine stetige Familie (related by continuation), wenn  $N$  eine isolierende Umgebung für alle  $f_\lambda$  mit  $\lambda \in \gamma$  ist. In diesem Fall sagt man auch,  $S_{\lambda_0}$  setzt sich zu  $S_{\lambda_1}$  fort.

Die wichtigste Aussage betrifft die sogenannte Fortsetzungseigenschaft des Conley-Index.

**Theorem 2.3.25.**

Setzt sich  $S_{\lambda_0}$  zu  $S_{\lambda_1}$  fort, dann gilt

$$h(S_{\lambda_0}) = h(S_{\lambda_1}).$$

BEWEIS. Siehe [Smo94, Chapter 23, Theorem 23.31, S. 500]. ■

**2.3.3 Zusammenhangsmatrizen (connection matrices)**

Es sei  $h(S)$  der Conley-Index einer isolierten invarianten Menge  $S$ .

Wir betrachten die relativen singulären  $\mathbb{Z}_2$ -Homologiegruppen von  $h(S)$  (genauer: die Homologie-Gruppen des topologischen Paares  $(B/b^+, [b^+])$  mit einem isolierenden Block  $B$ )

$$H_*(h(S); \mathbb{Z}_2) = H_*(B, b^+; \mathbb{Z}_2)$$

Es ist

$$H_*(h(S); \mathbb{Z}_2) = \{H_n(h(S); \mathbb{Z}_2); n \in \mathbb{N}\},$$

wobei  $H_n(h(S); \mathbb{Z}_2)$  für jedes  $n \in \mathbb{N}$  ein  $\mathbb{Z}_2$ -Vektorraum ist.

**Satz 2.3.26.**

Ist  $S$  eine hyperbolische Ruhelage, die genau  $k$  Eigenwerte mit positivem Realteil besitzt, so gilt

$$H_n(h(S); \mathbb{Z}_2) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & \text{für } n = k, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

BEWEIS. Diese Aussage folgt aus Satz 2.3.18 (zusammen mit der nachfolgenden Bemerkung (i)) und der Tatsache, dass für die relativen Homologie-Gruppen der Sphäre  $S^k$  gilt:

$$H_n(S^k; \mathbb{Z}_2) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & \text{für } n = k, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad \blacksquare$$

Für zwei isolierte invariante Mengen  $S_1$  und  $S_2$  definieren wir die Menge der Punkte, die auf „Verbindungen“ von  $S_1$  nach  $S_2$  liegen:

$$C(S_1, S_2) = \{x : \alpha(x) \subset S_1, \omega(x) \subset S_2\}.$$

**Definition 2.3.27.**

Eine Morse-Zerlegung von  $S$  ist eine endliche Familie

$$\mathcal{M}(S) = \{M(i); i \in (I, <)\}$$

kompakter isolierter invarianter Mengen in  $S$ , wobei die Indexmenge  $I$  mit einer Halbordnung versehen sei, die in folgendem Sinne mit dem Fluss verträglich ist:

Wenn  $x \in S$  gilt, dann ist entweder  $x \in M(i)$  oder  $x \in C(M(i), M(j))$  mit  $i < j$ .  
Die Mengen  $M(i)$  heißen Morse-Mengen.

Wir schreiben

$$H(i) = H_*(h(M(i)); \mathbb{Z}_2) \quad \text{und} \quad H_n(i) = H_n(h(M(i)); \mathbb{Z}_2).$$

Sei  $S$  eine isolierte invariante Menge und  $M(S)$  eine Morse-Zerlegung. Sei  $\Delta = (\Delta_{ij})_{i,j \in I}$  eine Matrix, deren Einträge  $\Delta_{ij} : H(i) \rightarrow H(j)$  selbst  $\mathbb{Z}_2$ -Matrizen sind und als  $\mathbb{Z}_2$ -lineare Abbildungen aufgefasst werden.

Eine Teilmenge  $J \subset I$  bezeichnet man als *Intervall*, wenn für beliebige  $i, j \in J$  mit  $i < j$  aus  $i < k < j$  für ein  $k \in I$  stets  $k \in J$  folgt; d.h. jedes Intervall  $J$  enthält mit zwei Punkten aus  $I$  auch alle dazwischen liegenden Punkte. Zum Beispiel ist  $J = \{0, 1\} \subset I$  ein Intervall für die betrachtete Morse-Zerlegung.

Ist  $J \subset I$  ein Intervall, dann kann man eine neue isolierte invariante Menge  $M(J)$  definieren, indem man

$$M(J) := \bigcup_{i \in J} M(i) \cup \bigcup_{i,j \in J} C(M(i), M(j))$$

setzt.

**Definition 2.3.28.**

Die Abbildung

$$\Delta : \bigoplus_{i \in I} H(i) \rightarrow \bigoplus_{i \in I} H(i)$$

ist eine Zusammenhangsmatrix, falls folgende Eigenschaften erfüllt sind:

(CM1)  $\Delta_{ij} = 0$ , wenn  $i \leq j$

(CM2)  $\Delta$  ist eine Randabbildung, d.h.  $\Delta^2 = 0$

(CM3)  $\Delta_{ij}(H_n(i)) \subset H_{n-1}(j)$  („Abbildung vom Grad -1“), sonst  $\Delta_{ij} = 0$

(CM4) Für jedes Intervall  $J \subset I$  gilt mit den Bezeichnungen

$$\Delta_n = \Delta|_{\bigoplus_{i \in J} H_n(i)} \quad \text{und} \quad H_n \Delta = \ker \Delta_n / \text{im } \Delta_{n+1}$$

gilt

$$H_n \Delta \cong H_n(h(M(J)); \mathbb{Z}_2).$$

**Bemerkung 2.3.29.**

Zu einer gegebenen Morse-Zerlegung existiert stets eine Zusammenhangsmatrix, aber Zusammenhangsmatrizen sind im Allgemeinen nicht eindeutig und die Mehrdeutigkeit kann Aufschluss über die Dynamik des zugrundeliegenden Systems geben. Für eine umfassende Darstellung der Theorie der Zusammenhangsmatrizen und ihren Eigenschaften verweisen wir auf [Fra89].  $\diamond$



**Satz 2.3.30.**

Sei  $\{i, j\} \subset I$  ein Intervall.

Dann folgt aus

$$\Delta_{ij} \neq 0,$$

dass

$$C(M(i), M(j)) \neq \emptyset$$

gilt.

BEWEIS. Siehe [Fra89]. ■

## 2.4 Geometrische singuläre Störungstheorie

### 2.4.1 Bezeichnungen

In diesem Abschnitt werden die später im Text benötigten Begriffe und Aussagen ([Jon95], [Szm89] und [Szm91] folgend) dargestellt. Die Resultate sind nicht in größtmöglicher Allgemeinheit formuliert, sondern der Einfachheit halber auf solche Situationen zugeschnitten, die in der Anwendung auf das Schockwellen-Problem der Magnetohydrodynamik tatsächlich auftreten. Für eine ausführliche Darstellung in umfassender Allgemeinheit verweisen wir auf die wohlbekannteren Arbeiten von N. Fenichel ([Fen72] und [Fen79]).

Man betrachtet ein singulär gestörtes System von gewöhnlichen Differentialgleichungen der Form

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y) \\ \varepsilon \dot{y} &= g(x, y) \end{aligned} \tag{2.4}$$

mit  $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ , wobei  $\varepsilon_0 > 0$  klein sei, und  $(x, y) \in U$  mit einer offenen Menge  $U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ . Wir nehmen an,  $(f, g) \in C^\infty(U, \mathbb{R}^{n+k})$ . Für  $\varepsilon \neq 0$  definieren die Gleichungen (2.4) einen glatten Fluss auf  $U$  und wir fassen die Variablen  $x$  und  $y$  dann als Funktionen von  $t$  auf. Die Bezeichnung *singuläre Störung* bezieht sich auf die Tatsache, dass das Vektorfeld  $(f, 1/\varepsilon g)^\top$  für  $\varepsilon = 0$  eine „Singularität“ besitzt; genauer gesagt, ist es in diesem Fall (zunächst) nicht definiert.

Eine besondere Eigenschaft von Systemen der Form (2.4) ist die Anwesenheit zweier verschiedener Zeitskalen, nämlich einer *langsamen* Zeitskala  $t$  und einer *schnellen* Zeitskala  $\tau := t/\varepsilon$ . In diesem Sinne bezeichnet man System (2.4) als das *langsame System*; geht man zur schnellen Variablen  $\tau$  über, so erhält man das zugehörige *schnelle System*

$$\begin{aligned} x' &= \varepsilon f(x, y) \\ y' &= g(x, y). \end{aligned} \tag{2.5}$$

Ferner bezeichnet man  $x$  als die *langsame Variable* und  $y$  als die *schnelle Variable*, denn in dem Grenzfall  $\varepsilon = 0$  verbleibt im langsamen System nur eine Differentialgleichung für  $x$  bzw. im schnellen System nur eine Differentialgleichung für  $y$ .

Setzt man im langsamen und schnellen System den Grenzfall  $\varepsilon = 0$  ein, so erhält man aus (2.4) das *reduzierte Problem*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y) \\ 0 &= g(x, y) \end{aligned} \tag{2.6}$$

bzw. aus (2.5) das *Schichtproblem*

$$\begin{aligned} x' &= 0 \\ y' &= g(x, y). \end{aligned} \tag{2.7}$$

Unter geeigneten Annahmen definiert die implizite Gleichung  $g(x, y) = 0$  eine Mannigfaltigkeit  $S$  (die sogenannte *langsame Mannigfaltigkeit*), auf welcher durch das reduzierte Problem (2.6) ein dynamisches System gegeben ist. Andererseits ist jedes Element der Menge  $S$  eine Ruhelage für das Schichtproblem (2.7).

Mit dieser Entkopplung des ursprünglichen Systems verbindet man die Vorstellung, dass das reduzierte Problem die wesentliche langsame Dynamik wiedergibt, während das Schichtproblem in geeigneter Weise die schnelle Dynamik repräsentiert. Diese Vorstellung rechtfertigt die Bezeichnung *langsame Mannigfaltigkeit*.

Unter gewissen Voraussetzungen kann man aus dem Verhalten des Schicht- und reduzierten Problems Informationen über das ursprüngliche System (2.4) für  $\varepsilon \neq 0$  erhalten. Konkreter gesagt, kann man unter geeigneten Umständen aus der Existenz heterokliner Orbits für das reduzierte Problem auf die Existenz heterokliner Orbits des gestörten Systems schließen.

Wir gehen im Weiteren von den folgenden Annahmen aus:

**(A1):** Die Gleichung

$$g(x, y) = 0$$

definiert eine kompakte  $C^r$ -Mannigfaltigkeit  $S$ .

**(A2):** Die partielle Jacobi-Matrix

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x, y)$$

besitzt bei allen Punkten  $(x, y) \in S$  nur Eigenwerte, deren Realteil ungleich Null ist.

**Bemerkung 2.4.1.**

Die Annahme (A2) sichert die *normale Hyperbolizität* der Mannigfaltigkeit  $S$ , d.h. unter der Annahme (A2) ist jeder Punkt  $(x, y) \in S$  eine *hyperbolische* Ruhelage für das Schichtproblem. Dieser Begriff lässt sich auch in wesentlich allgemeineren Situationen definieren (siehe dazu etwa [Fen72]).  $\diamond$

## 2.4.2 Die „langsame“ Mannigfaltigkeit

**Theorem 2.4.2 (Siehe [Jon95, S.49, Theorem 1]).**

Für  $\varepsilon > 0$  (genügend klein) existiert unter den Annahmen (A1) und (A2) eine lokal invariante kompakte  $C^r$ -Mannigfaltigkeit  $S^\varepsilon$  nahe und diffeomorph zu  $S$ .

**Bemerkung 2.4.3.**

Aufgrund der lokalen Invarianz kann man zunächst den Fluss auf  $S^\varepsilon$  einschränken und für dieses Problem von geringerer Dimension interessante dynamische Strukturen suchen, z.B. nach heteroklinen Orbits. Unter (im nächsten Abschnitt beschriebenen) Umständen lassen sich solche Strukturen von dem Fall  $\varepsilon = 0$  auf den Fall  $0 < \varepsilon \ll 1$  übertragen. Heterokline Orbits in der Mannigfaltigkeit  $S$  bezeichnet man auch als *langsame* Orbits, weil sie in der *langsamen* Mannigfaltigkeit  $S$  liegen.  $\diamond$

Jede Mannigfaltigkeit lässt sich *lokal* als Graph einer glatten Funktion darstellen. In dem Spezialfall, dass sich die Mannigfaltigkeit  $S$  *global* als Graph einer glatten Funktion schreiben lässt, kann man das Theorem 2.4.2 noch konkreter formulieren. Es existiere eine  $C^r$ -Funktion  $h : V \rightarrow \mathbb{R}^k$  mit einer offenen Menge  $V \subset \mathbb{R}^n$ , sodass

$$S = \{y = h(x) : x \in K \subset V\}$$

mit einer geeigneten kompakten Teilmenge  $K \subset V$  gilt. Unter dieser zusätzlichen Annahme können wir das Theorem 2.4.2 in der folgenden Weise formulieren.

**Theorem 2.4.4 (Siehe [Jon95, S.50, Theorem 2]).**

Für  $\varepsilon > 0$  (genügend klein) existiert unter den Annahmen (A1) und (A2) eine  $C^r$ -Funktion  $h^\varepsilon : V^\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}^k$  auf einer offenen Menge  $V^\varepsilon \subset \mathbb{R}^n$ , sodass der Graph von  $h^\varepsilon$ , gegeben durch

$$S^\varepsilon = \{y = h^\varepsilon(x) : x \in K \subset V^\varepsilon\}$$

lokal invariant ist. Außerdem ist  $h^\varepsilon$  auch bezüglich  $\varepsilon$  von der Klasse  $C^r$ .

Mit dieser Formulierung lässt sich das reduzierte Problem einfacher aufschreiben; im langsamen System setzen wir  $y = h^\varepsilon(x)$  ein und erhalten:

$$\begin{array}{ccc} \dot{x} = f(x, h^\varepsilon(x)) & \text{auf } S^\varepsilon & \dot{x} = f(x, h^\varepsilon(x)) & \xrightarrow{\varepsilon=0} & \dot{x} = f(x, h(x)) \\ \varepsilon \dot{y} = g(x, h^\varepsilon(x)) = 0 & & y = \text{const} & & y = \text{const} \end{array} \quad (2.8)$$

Mit anderen Worten, das ursprüngliche singuläre Störungsproblem wird auf der Mannigfaltigkeit  $S^\varepsilon$  zu einem regulären Störungsproblem, für welches der Übergang  $\varepsilon \rightarrow 0$  keine Probleme bereitet.

## 2.4.3 Persistenz heterokliner Orbits

Die Mannigfaltigkeit  $S$  muss nicht zusammenhängend sein, sondern kann aus mehreren Komponenten bestehen. Seien etwa

$$S_1 = \{(x, y_1(x)) : x \in V_1 \subset \mathbb{R}^n\} \quad \text{und} \quad S_2 = \{(x, y_2(x)) : x \in V_2 \subset \mathbb{R}^n\}$$

mit  $V := V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$  zwei Komponenten von  $S$ . Weiter seien  $N_1 \subset S_1$  und  $N_2 \subset S_2$  normal hyperbolische Mannigfaltigkeiten (im einfachsten Fall beispielsweise Ruhelagen) des reduzierten Problems. Wir werden im Folgenden zwei Fälle betrachten, in denen heterokline Orbits existieren:

**1. Fall:** Es gelte  $S_1 = S_2 = S$ , d.h.  $N_1$  und  $N_2$  sind in derselben Komponente von  $S$  enthalten, und es existiere ein (*langsamer*) heterokliner Orbit, d.h. die instabile Mannigfaltigkeit  $\mathcal{W}_1^u$  von  $N_1$  und die stabile Mannigfaltigkeit  $\mathcal{W}_2^s$  von  $N_2$  schneiden sich.

**2. Fall:** Es gelte  $N_1 \subset S_1$  und  $N_2 \subset S_2$  mit verschiedenen Komponenten  $S_1$  und  $S_2$  von  $S$ . Es existiere ein *singulärer* Orbit, d.h. es gebe eine Verbindung zwischen  $N_1$  und  $N_2$ , die aus drei Teilen besteht: aus einem Orbit in  $\mathcal{W}_1^u$ , aus einem Orbit des Schichtproblems (2.7) und aus einem Orbit in  $\mathcal{W}_2^s$ .

In beiden Fällen ist die Existenz des heteroklinen Orbits äquivalent dazu, dass sich die *singulären* Mannigfaltigkeiten  $\mathcal{N}_1^u$  und  $\mathcal{N}_2^s$  schneiden. Die Struktur von  $\mathcal{N}^s$  (bzw.  $\mathcal{N}^u$ ) lässt sich genauer beschreiben (siehe [Fen79] und [Szm89]). Für  $\varepsilon = 0$  handelt es sich um eine *gefaserte* Mannigfaltigkeit, d.h.

$$\mathcal{N}^s = \{\mathcal{F}^s(p) : p \in \mathcal{W}^s\},$$

wobei die instabilen Fasern  $\mathcal{F}^s(p)$  Orbits des Schichtproblems, mithin invariant, sind. Diese Faserung bleibt für das singular gestörte Problem erhalten, jedoch überträgt sich die Invarianz der Fasern nicht; stattdessen gilt sogenannte *positive Invarianz*, d.h.

$$\forall p \in \mathcal{W}^s \forall \tau \geq 0 : p \cdot [0, \tau] \in \mathcal{W}^s \implies \mathcal{F}^s(p) \cdot \tau \subset \mathcal{F}^s(p \cdot \tau).$$

Zusammenfassend, ist die Existenz einer Verbindung gleichbedeutend mit einer nicht-leeren Schnittmenge von

$$\mathcal{N}_1^u = \{\mathcal{F}^u(p) : p \in \mathcal{W}_1^u\} \quad \text{und} \quad \mathcal{N}_2^s = \{\mathcal{F}^s(p) : p \in \mathcal{W}_2^s\}.$$

Zur Formulierung des Theorems über die Persistenz solcher heteroklinen Verbindungen benötigen wir den Begriff des *transversalen* Schnittes von Untermannigfaltigkeiten.

**Definition 2.4.5.**

Seien  $M_1$  und  $M_2$  Untermannigfaltigkeiten der Mannigfaltigkeit  $M$ . Man sagt,  $M_1$  und  $M_2$  schneiden sich transversal in  $p \in M_1 \cap M_2$ , wenn

$$T_p M = T_p M_1 + T_p M_2$$

erfüllt ist.

**Theorem 2.4.6 (siehe [Szm91, Theorem 3.1]).**

Die Annahmen (A1) und (A2) seien erfüllt und für  $i \in \{1, 2\}$  sei  $N_i \subset S_i$  eine  $j_i$ -dimensionale kompakte normal hyperbolische invariante Mannigfaltigkeit des reduzierten Vektorfeldes auf  $S$  mit einer  $j_i + j_i^s$ -dimensionalen stabilen Mannigfaltigkeit  $\mathcal{W}_i^s$  und einer  $j_i + j_i^u$ -dimensionalen instabilen Mannigfaltigkeit  $\mathcal{W}_i^u$ .

Angenommen, die Mannigfaltigkeiten

$$\mathcal{N}_1^u = \{\mathcal{F}^u(p) : p \in \mathcal{W}_1^u\} \quad \text{und} \quad \mathcal{N}_2^s = \{\mathcal{F}^s(p) : p \in \mathcal{W}_2^s\}$$

schneiden sich transversal entlang eines heteroklinen Orbits  $\gamma_0$ .

Dann existiert ein  $\varepsilon_1 > 0$ , sodass es für das singular gestörte Problem ebenfalls einen transversalen heteroklinen Orbit  $\gamma_\varepsilon$  gibt, der die Mannigfaltigkeiten  $N_{1,\varepsilon}$  und  $N_{2,\varepsilon}$  verbindet für jedes  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$ . Ferner ist die Familie  $\{\gamma_\varepsilon\}$  von Orbits gleichförmig nahe dem Orbit  $\gamma_0$ .

**Bemerkung 2.4.7.**

Man bezeichnet einen solchen heteroklinen Orbit, entlang dessen sich die entsprechende stabile und instabile Mannigfaltigkeit transversal schneiden, ebenfalls als *transversal*.  $\diamond$

Im Hinblick auf die Anwendung der zitierten Sätze im Kontext der viskosen Profile der Magnetohydrodynamik geben wir die Theoreme für den Fall, dass es sich bei den Mengen  $N_i$  um Ruhelagen handelt, explizit an.

**Folgerung 2.4.8.**

Für  $i \in \{1, 2\}$  seien  $N_i := \{p_i\} \subset S_i$  hyperbolische Ruhelagen des reduzierten Vektorfeldes auf  $S$  mit einer  $j_i^s$ -dimensionalen stabilen Mannigfaltigkeit  $\mathcal{W}_i^s$  und einer  $j_i^u$ -dimensionalen instabilen Mannigfaltigkeit  $\mathcal{W}_i^u$ .

Angenommen, die Mannigfaltigkeiten

$$\mathcal{N}_1^u = \{\mathcal{F}^u(p) : p \in \mathcal{W}_1^u\} \quad \text{und} \quad \mathcal{N}_2^s = \{\mathcal{F}^s(p) : p \in \mathcal{W}_2^s\}$$

schneiden sich transversal entlang eines heteroklinen Orbits.

Dann existiert ein  $\varepsilon_1 > 0$ , sodass es für das singular gestörte Problem ebenfalls einen transversalen heteroklinen Orbit gibt, der die Ruhelagen  $N_{1,\varepsilon} = \{p_{1,\varepsilon}\}$  und  $N_{2,\varepsilon} = \{p_{2,\varepsilon}\}$  verbindet für jedes  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$ .

Die nächste Bemerkung bezieht sich auf die Transversalität in zwei besonders einfachen Situationen.

**Bemerkung 2.4.9.**

- (i) Gilt in Folgerung 2.4.8

$$\dim S = 1,$$

so ist jeder langsame heterokline Orbit transversal.

- (ii) Handelt es sich in Folgerung 2.4.8 bei  $p_1$  um einen instabilen Knoten oder bei  $p_2$  um einen stabilen Knoten, so ist jeder heterokline Orbit transversal, denn es gilt dann  $T_p \mathcal{W}_1^u = T_p S$  bzw.  $T_p \mathcal{W}_2^s = T_p S$   $\diamond$

Der nächste Satz beschreibt die Konvergenz der Familie  $\{\gamma_\varepsilon\}$  von heteroklinen Orbits für den Grenzübergang  $\varepsilon \rightarrow 0$ , wenn es sich bei  $\gamma_0$  um einen *langsamen* bzw. *singularen* heteroklinen Orbit handelt. Für den ersten Fall wird gleichmäßige Konvergenz auf ganz  $\mathbb{R}$  gezeigt. Das kann für den zweiten Fall natürlich nicht zutreffen, weil der Orbit  $\gamma_0$

keine stetige Funktion auf  $\mathbb{R}$  darstellt; stattdessen wird gleichmäßige Konvergenz im Komplement jeder Umgebung der Sprungstelle bewiesen.

Da die Orbits Lösungen einer *autonomen* Differentialgleichung sind, sind sie nur bis auf eine additive Konstante in der unabhängigen Variablen  $t$  eindeutig bestimmt. Aus diesem Grund muss im nachfolgenden Satz zuerst eine für die Familie einheitliche Wahl der Konstanten getroffen werden.

**Satz 2.4.10 (Siehe [Szm89, Theoreme 3.2 und 4.2] ).**

*Unter den Voraussetzungen von Theorem 2.4.6 sei  $T$  eine Mannigfaltigkeit, die den Orbit  $\gamma_0$  transversal schneidet. Die Orbits  $\gamma_\varepsilon$  seien derart parametrisiert, dass*

$$\gamma_\varepsilon(0) = \gamma_\varepsilon \cap T$$

für alle  $\varepsilon \in [0, \varepsilon_1)$  gilt.

(i) Wenn  $\gamma_0$  ein langsamer Orbit ist, so ist die Konvergenz

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \gamma_\varepsilon(t) = \gamma_0(t)$$

gleichmäßig für alle  $t \in \mathbb{R}$ .

(ii) Wenn  $\gamma_0 = \gamma_0^u \cup \gamma_0^{sing} \cup \gamma_0^s$  ein singulärer Orbit ist und es eine Komponente  $f_i(x, y)$  von  $f(x, y)$  gibt, die ein konstantes Vorzeichen auf der Menge  $\gamma \times \{0\}$ , so ist die Konvergenz

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \gamma_\varepsilon(t) = \begin{cases} \gamma_0^u(t) & \text{für } t < 0 \\ \gamma_0^s(t) & \text{für } t > 0 \end{cases}$$

gleichmäßig für alle  $t \in I$ , wobei  $I \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$  ein Intervall ist, welches die 0 nicht enthält.

### 3 Elementare Analyse des dynamischen Systems

#### 3.1 Lyapunov-Funktion und Skalierung

Für die weitere Analyse ist es wesentlich, dass das vorliegende System eine Lyapunov-Funktion besitzt. Wir setzen

$$P(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}m|\mathbf{w}|^2 + \frac{1}{2}v|\mathbf{b}|^2 + q(v) - jv - a\langle \mathbf{b}, \mathbf{w} \rangle - \langle (c, 0)^\top, \mathbf{b} \rangle$$

und bezeichnen die Funktion  $P$  als *Energie*; dabei ist  $q(v) = \int p(v) dv$ . Somit gilt

$$B\mathbf{u}' = \nabla P(\mathbf{u})$$

mit  $B := \text{diag}\{\mu, \nu, \nu, \eta, \eta\}$  und wir haben das System als *gradientenartig* erkannt.

##### **Bemerkung 3.1.1.**

(i) Entlang von Orbits gilt:

$$P'(\mathbf{u}(t)) = \langle \nabla P(\mathbf{u}(t)), \mathbf{u}'(t) \rangle = \langle \nabla P(\mathbf{u}(t)), B^{-1}\nabla P(\mathbf{u}(t)) \rangle \geq 0.$$

Daraus ergibt sich unmittelbar:  $P'(\mathbf{u}(t)) = 0 \iff \mathbf{u}(t)$  ist Ruhelage.

(ii) Setzen wir ferner

$$D(\mathbf{u}(t)) = \mu \left( \frac{dv}{dt} \right)^2 + \nu \left( \frac{dw_1}{dt} \right)^2 + \nu \left( \frac{dw_2}{dt} \right)^2 + \eta \left( \frac{db_1}{dt} \right)^2 + \eta \left( \frac{db_2}{dt} \right)^2 \geq 0,$$

so folgt

$$\frac{dP(\mathbf{u}(t))}{dt} = D(\mathbf{u}(t))$$

oder in Integralform

$$P(\mathbf{u}(t_2)) - P(\mathbf{u}(t_1)) = \int_{t_1}^{t_2} D(\mathbf{u}(t)) dt.$$

Für den Fall, dass einer der Viskositätskoeffizienten  $> 0$  ist, folgt aus der Definition  $D > 0$ , also wächst  $P$  *streng* monoton entlang von Orbits, wie aus der Integralform unmittelbar hervorgeht.

Mit anderen Worten: Wenn ein nichtkonstanter Orbit  $\mathbf{u}_l \rightarrow \mathbf{u}_r$  existiert, so folgt die Gültigkeit der Ungleichung  $P(\mathbf{u}_l) < P(\mathbf{u}_r)$ .

(iii) Die qualitative Struktur des Systems ändert sich nicht, wenn man eine Umskalierung der Zeit  $\tilde{t} = \varepsilon \cdot t$  vornimmt. Dabei werden aus den Koeffizienten  $(\mu, \nu, \eta)$

auf der linken Seite der Gleichungen die Koeffizienten  $(\mu \cdot \varepsilon, \nu \cdot \varepsilon, \eta \cdot \varepsilon)$ , d.h. entscheidend sind nur die paarweisen Verhältnisse der Koeffizienten, nicht jedoch deren konkrete Werte, und bei Bedarf kann man für einen der Koeffizienten einen beliebigen positiven Wert vorgeben.  $\diamond$

### 3.2 Bestimmung der Ruhelagen

Wir formulieren für jeden der beiden Fälle  $c > 0$  und  $c = 0$  jeweils einen Satz über die Anzahl und die Gestalt der Ruhelagen; diese sind gegeben durch die Lösungen des nichtlinearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} mv + p(v) + \frac{1}{2} |\mathbf{b}|^2 - j &= 0 \\ m\mathbf{w} - a\mathbf{b} &= 0 \\ v\mathbf{b} - a\mathbf{w} - (c, 0)^\top &= 0. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Wir benutzen die Abkürzung  $d := \frac{a^2}{m} > 0$ .

**Satz 3.2.1.**

Sei  $c > 0$  beliebig, aber fest gewählt. Dann existieren Zahlen  $j_1^*, j_2^* \in \mathbb{R}$  mit  $j_1^* \leq j_2^*$ , sodass gilt:

- (i) Für  $j \in (-\infty, j_1^*)$  besitzt das Gleichungssystem (3.1) keine Lösung.
- (ii) Für  $j \in (j_1^*, j_2^*)$  gibt es genau zwei verschiedene Zustände  $\mathbf{u}_-, \mathbf{u}_+$ , die (3.1) erfüllen, und für

$$\mathbf{u}_i = (v_i, \mathbf{w}_i, \mathbf{b}_i) \quad \text{mit} \quad i \in \{+, -\}$$

gilt

$$\mathbf{w}_i = \mathbf{b}_i = \frac{1}{v_i - d} \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_+ > v_- > 0.$$

Dabei können die beiden Fälle  $v_+ > v_- > d$  oder  $d > v_+ > v_-$  eintreten.

- (iii) Für  $j \in J_c := (j_2^*, \infty)$  gibt es genau vier verschiedene Zustände  $\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ , die (3.1) erfüllen, und für

$$\mathbf{u}_i = (v_i, \mathbf{w}_i, \mathbf{b}_i) \quad \text{mit} \quad i \in \{0, 1, 2, 3\}$$

gilt

$$\mathbf{w}_i = \mathbf{b}_i = \frac{1}{v_i - d} \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_0 > v_1 > d > v_2 > v_3 > 0.$$

BEWEIS. Aus der zweiten Gleichung von (3.1) bekommt man

$$\mathbf{w} = \frac{a}{m} \mathbf{b}$$



und Einsetzen dieses Ausdrucks in die dritte Gleichung von (3.1) liefert

$$(v-d)\mathbf{b} - \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wegen  $c \neq 0$  würde  $v = d$  der Relation für die erste Komponente widersprechen, also gilt  $v \neq d$ . Daraus folgt sofort  $b_2 = 0$  und mit der vorherigen Gleichung  $w_2 = 0$ . Insbesondere findet man, dass für jedes  $v$ , welches die erste Komponente einer Lösung  $\mathbf{u} = (v, \mathbf{w}, \mathbf{b})$  ist, die zugehörigen Vektoren  $\mathbf{b}$  und  $\mathbf{w}$  eindeutig bestimmt sind, nämlich

$$\mathbf{w} = \frac{a}{m}\mathbf{b} = \frac{1}{v-d} \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Hieraus ergibt sich bereits, dass die in (ii) und (iii) angegebenen Formeln für die Komponenten  $\mathbf{w}$  und  $\mathbf{b}$  der Ruhelagen korrekt sind. Es verbleibt also noch die Betrachtung der  $v$ -Komponente.

Setzt man die soeben abgeleitete Relation für  $\mathbf{b}$  in die erste Gleichung ein, so ergibt sich

$$f(v) := \underbrace{mv + p(v) + \frac{1}{2} \frac{c^2}{(v-d)^2}}_{=: \tilde{f}(v)} - j = 0.$$

Die Funktion  $f$  ist in  $(0, d) \cup (d, \infty)$  stetig differenzierbar und es gilt

$$f'(v) = m + p'(v) - \frac{c^2}{(v-d)^3} \text{ und } f''(v) = p''(v) + \frac{3c^2}{(v-d)^4} > 0.$$

$f$  besitzt jeweils genau ein Minimum auf  $(0, d)$  bzw.  $(d, \infty)$ ; denn  $f'(v)$  besitzt nach dem Zwischenwertsatz wegen der Grenzwerte

$$\lim_{v \searrow 0} f'(v) = \lim_{v \searrow d} f'(v) = -\infty, \lim_{v \nearrow d} f'(v) = +\infty \text{ und } \lim_{v \rightarrow \infty} f'(v) = m > 0,$$

die man aus der expliziten Formel für  $f'(v)$  unter Verwendung der angenommenen Eigenschaften von  $p(v)$  bekommt, Nullstellen auf  $(0, d)$  bzw.  $(d, \infty)$ , deren Eindeutigkeit aus der Monotonie von  $f'(v)$  auf diesen Intervallen folgt. Anders ausgedrückt, besitzt die Gleichung  $f'(v) = 0$  genau zwei Lösungen  $0 < c_- < d < c_+$ . Aufgrund der Konvexität von  $f$  und der Existenz eines lokalen Minimums erhält man genau dann zwei Nullstellen auf  $(0, d)$ , wenn  $f(c_-) < 0$  gilt. Entsprechend erhält man genau dann zwei Nullstellen auf  $(d, \infty)$ , wenn  $f(c_+) < 0$  gilt. Mit den Bezeichnungen

$$j_1^* := \min\{\tilde{f}(c_-), \tilde{f}(c_+)\} \text{ und } j_2^* := \max\{\tilde{f}(c_-), \tilde{f}(c_+)\}$$

lässt sich diese Feststellung auch so formulieren:

- Falls  $j < j_1^*$  ist, dann besitzt die Funktion  $f(v)$  keine Nullstellen und der Fall (i) ist bewiesen.

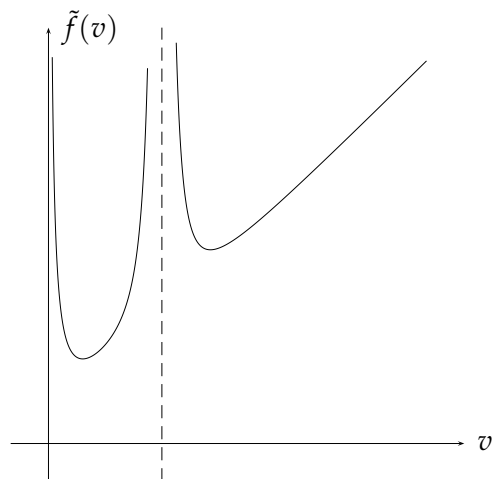


ABBILDUNG 1. Darstellung der Funktion  $\tilde{f}(v)$ .

- Falls  $j > j_2^*$  gewählt wird, dann hat die Funktion  $f(v)$  genau vier Nullstellen

$$0 < v_3 < c_- < v_2 < d < v_1 < c_+ < v_0$$

und der Fall (iii) ist bewiesen.

- Wenn schließlich  $j \in (j_1^*, j_2^*)$  gilt, so gilt entweder  $f(c_-) < 0$  oder  $f(c_+) < 0$  und man findet genau zwei Nullstellen  $v_-$  und  $v_+$ , die entsprechend entweder

$$v_- < c_- < v_+ < d \quad \text{oder} \quad d < v_- < c_+ < v_+$$

erfüllen; damit ist der Fall (ii) gezeigt. ■

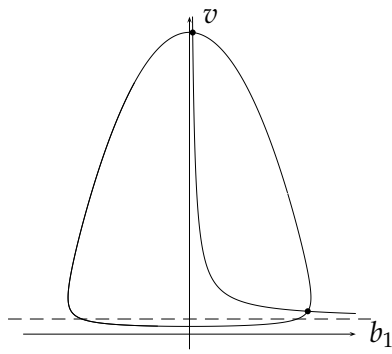


ABBILDUNG 2. Projektion der Nullclines in die  $b_1$ - $v$ -Ebene für  $d = 0.5$ .

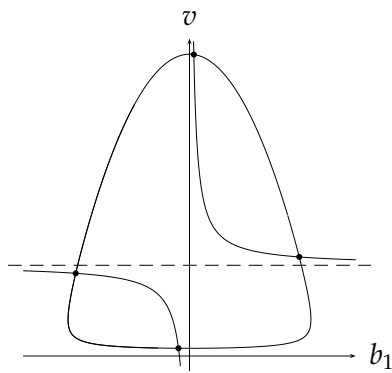


ABBILDUNG 3. Projektion der Nullclines in die  $b_1$ - $v$ -Ebene für  $d = 3.0$ .

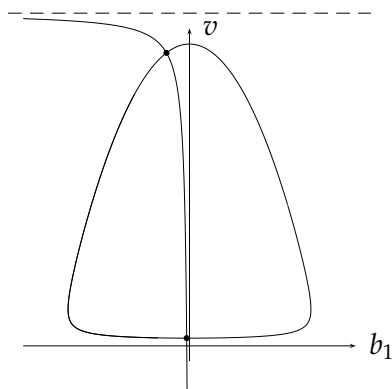


ABBILDUNG 4. Projektion der Nullclines in die  $b_1$ - $v$ -Ebene für  $d = 11.0$ .

**Bemerkung 3.2.2.**

- (i) Die Nullstellen von  $f'(v) = 0$  lassen sich explizit unter Verwendung von typischen Geschwindigkeiten, die aus der Physik bekannt sind, ausdrücken. Man stößt dabei auf die sogenannten *magnetoakustischen Geschwindigkeiten*  $c_{\pm}$ . Dazu formen wir um:

$$m + p'(v) - \frac{c^2}{(v-d)^3} = \frac{m}{v^2} \left( v^2 - c_s^2 - \frac{c^2 v^2}{m(v-d)^3} \right)$$

Weiter gilt bei einer Ruhelage  $\mathbf{u} = (v, w_1, w_2, b_1, b_2)$  nach dem Satz 3.2.1

$$\frac{c^2 v^2}{m(v-d)^3} = \frac{b_1^2 v}{m} \frac{v^2}{v(v-d)} = \frac{c_b^2 v^2}{v^2 - c_a^2}$$

also  $f'(v) = -1/v^2 R(v)$  mit

$$R(v) = v^2 - c_s^2 - \frac{c_b^2 v^2}{v^2 - c_a^2}.$$

Die Nullstellen von  $f'(v) = 0$  sind also genau die Nullstellen von  $R(v) = 0$ ; diese erfüllen die Gleichung

$$T^4 - (c_s^2 + c_a^2 + c_b^2)T^2 + c_s^2 c_a^2 = 0.$$

Demnach gilt

$$c_{\pm}^2 = \frac{c_s^2 + c_a^2 + c_b^2}{2} \pm \sqrt{\frac{(c_s^2 + c_a^2 + c_b^2)^2}{4} - c_s^2 c_a^2}.$$

- (ii) Wir geben noch einen kurzen Vergleich der Ruhelagen mit der sogenannten *Alfvén-Geschwindigkeit*  $c_a$  (siehe Unterabschnitt 1.4.3) an, weil diese in der Literatur häufig auftaucht. In unserer Notation ist  $c_a^2 = \frac{a^2}{m} v$ . Deshalb gilt

$$v > c_a \iff v > d.$$

Für die Geschwindigkeitskomponenten der Ruhelagen gilt also insgesamt nach Satz 3.2.1

$$v_0 > c_+ > v_1 > c_a \quad \text{und} \quad c_a > v_2 > c_- > v_3 > 0.$$

- (iii) Im weiteren Verlauf wird es wichtig sein, die Vorzeichen der Werte von  $R(v)$  an den Ruhelagen zu kennen. Aufgrund der Voraussetzungen an  $p(v)$  (siehe Unterabschnitt 1.4.2) kennen wir folgende Grenzwerte der auf  $(0, d) \cup (d, \infty)$  stetig differenzierbaren Funktion  $f'(v)$ :

$$\lim_{v \searrow 0} f'(v) = \lim_{v \searrow d} f'(v) = -\infty \quad \text{und} \quad \lim_{v \nearrow d} f'(v) = +\infty, \quad \lim_{v \rightarrow \infty} f'(v) = m.$$

Damit lassen sich die Vorzeichen von  $R(v)$  bestimmen:

Es gilt  $R(v_k) > 0$  für  $k = 1, 3$  und  $R(v_k) < 0$  für  $k = 0, 2$ . ◇

**Satz 3.2.3.**

Für  $c = 0$  gibt es Zahlen  $j_1^*, j_2^* \in \mathbb{R}, j_1^* \leq j_2^*$ , sodass gilt:

- (i) Ist  $j \in (j_1^*, \infty)$ , so gibt es genau zwei verschiedene Zustände  $\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_3$  mit  $v_0 > v_3$ , die (3.1) erfüllen und es ist

$$\mathbf{u}_i = (v_i, \mathbf{0}, \mathbf{0})$$

für  $i \in \{0, 3\}$ .

- (ii) Ist  $j \in (j_2^*, \infty)$ , so gibt es eine Menge

$$A := \{(v, \mathbf{w}, \mathbf{b}) : v = d, \mathbf{w} = \frac{a}{m}\mathbf{b}, |\mathbf{b}|^2 = 2(j - (md + p(d)))\}$$

von Zuständen, die (3.1) erfüllen.

BEWEIS. Bei einer Ruhelage ist

$$\mathbf{w} = \frac{a}{m}\mathbf{b}$$

erfüllt.

Ist  $c = 0$ , dann liefert die dritte Gleichung  $(v - d)\mathbf{b} = 0$ , also  $\mathbf{b} = 0$  oder  $v = d$ .

Ist  $\mathbf{b} = 0$ , so hat das Magnetfeld an dieser Stelle keine transversalen Komponenten und wir erhalten aus der ersten Gleichung  $mv + p(v) = j$ .

Diese Gleichung besitzt (nach einem ähnlichen Argument wie im Beweis von Satz 3.2.1) genau dann zwei Lösungen  $0 < v_3 < v_0$ , wenn die Bedingung

$$j > j_1^* := \min_{v>0} mv + p(v)$$

erfüllt ist. In diesem Fall erhalten wir also zwei Zustände  $\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_3$ , deren  $v$ -Komponente  $v_0 > v_* > v_3$  erfüllt, wobei die konvexe Funktion  $mv + p(v)$  bei  $v = v_*$  ihr globales Minimum annimmt; somit ist Fall (i) gezeigt.

Ist  $v = d$ , so liefert die erste Gleichung  $md + p(d) + 1/2 |\mathbf{b}|^2 = j$ ; d.h. genau dann, wenn

$$j > j_2^* := md + p(d)$$

erfüllt ist, kann  $\mathbf{b}$  alle möglichen Werte auf dem Kreis

$$|\mathbf{b}|^2 = 2(j - (md + p(d)))$$

annehmen; d.h. es gilt Aussage (ii).

Offensichtlich geht aus den Definitionen  $j_1^* \leq j_2^*$  hervor. ■

**Bemerkung 3.2.4.**

Für  $j \in (j_2^*, \infty)$  treten stets beide Fälle (i) und (ii) ein; es gibt dann also beide Arten von Ruhelagen. ◇

**Satz 3.2.5.**

- (i)  $P|_A = \text{const.}$

(ii) Es gilt

$$P(\mathbf{u}_0) < P(\mathbf{u}_1) \quad \text{und} \quad P(\mathbf{u}_2) < P(\mathbf{u}_3).$$

(iii) Es gilt

$$P(\mathbf{u}_1) < P(\mathbf{u}_2) \iff c > 0.$$

BEWEIS. (i) Für  $\mathbf{u} = (d, \mathbf{w}, \mathbf{b}) \in A$  gilt nach Satz 3.2.3

$$|\mathbf{b}|^2 = \text{const} \quad \text{und} \quad \mathbf{w} = \frac{a}{m} \mathbf{b},$$

also erhält man wegen  $c = 0$ :

$$\begin{aligned} P(\mathbf{u}) &= \left( \frac{m}{2} d^2 + q(d) - jd \right) + \frac{m}{2} |\mathbf{w}|^2 + \frac{d}{2} |\mathbf{b}|^2 - a \langle \mathbf{w}, \mathbf{b} \rangle \\ &= \left( \frac{1}{2} m d^2 + q(d) - jd \right) + \left( \frac{m a^2}{2 m} + \frac{d}{2} - \frac{a^2}{m} \right) |\mathbf{b}|^2 \\ &= \text{const} \quad \text{wegen} \quad |\mathbf{b}| = \text{const}. \end{aligned}$$

(ii) Betrachten wir die Funktion  $P(\mathbf{u})$  auf der Menge

$$\left\{ \mathbf{u} : \frac{\partial P}{\partial \mathbf{w}} = \frac{\partial P}{\partial \mathbf{b}} = 0 \right\},$$

so erhalten wir

$$P(\mathbf{u}) = \frac{m}{2} v^2 - \frac{1}{2} \frac{c^2}{v-d} + q(v) - jv =: g(v).$$

Um Behauptung (ii) nachzuweisen, genügt es also die beiden Ungleichungen

$$g(v_3) > g(v_2) \quad \text{und} \quad g(v_1) > g(v_0) \tag{3.2}$$

zu zeigen, wobei  $v_i$  die Geschwindigkeitskomponenten von Ruhelagen  $\mathbf{u}_i$  bezeichnen. Wir wissen aus dem Beweis von Satz 3.2.1, dass jedes  $v_i$  eine Lösung von  $f(v) = 0$  ist und dass  $f(v) < 0$  auf den Intervallen  $(v_3, v_2)$  und  $(v_1, v_0)$  gilt. Aus diesen Bemerkungen folgen die Ungleichungen (3.2) anhand der Beobachtung

$$g'(v) = f(v),$$

aus der sich nämlich die Relationen

$$g(v_2) - g(v_3) = \int_{v_3}^{v_2} g'(v) \, dv = \int_{v_3}^{v_2} f(v) \, dv < 0$$

und

$$g(v_0) - g(v_1) = \int_{v_1}^{v_0} g'(v) \, dv = \int_{v_1}^{v_0} f(v) \, dv < 0$$

ergeben.

(iii) Für den Fall  $c = 0$  folgt aus (i) bereits  $P(\mathbf{u}_1) = P(\mathbf{u}_2)$ , denn es gilt  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in A$ . Es bleibt also  $P(\mathbf{u}_1) < P(\mathbf{u}_2)$  im Fall  $c > 0$  zu zeigen.  $j$  sei fest gewählt.

Wir benutzen die folgenden Bezeichnungen:

- $\mathfrak{U} = \{(v, \mathbf{w}, \mathbf{b})\} \subset \mathbb{R}^5$
- $\overline{\mathfrak{U}} = \{(v, \mathbf{w}, \mathbf{b}, c)\} \subset \mathbb{R}^6$
- $\mathfrak{V} \subset \overline{\mathfrak{U}}$  definiert durch

$$\frac{\partial P}{\partial \mathbf{b}} = \frac{\partial P}{\partial v} = \frac{\partial P}{\partial \mathbf{w}} = 0$$

In  $\mathfrak{V}$  gilt:

$$\frac{dP}{dc} = -b_1.$$

Wir betrachten in  $\mathfrak{V}$  Kurven, die durch  $c$  parametrisiert sind. Wir nehmen an, dass zu gegebenem  $c = c^* > 0$  die Ruhelagen  $\mathbf{u}_i = (v_i, \mathbf{w}_i, \mathbf{b}_i)$  mit  $i \in \{1, 2\}$  existieren und betrachten einen Weg, der diese Punkte verbindet.

Die Kurven

$$K_i : [0, c^*] \rightarrow \mathfrak{V}, c \mapsto \mathbf{u}_i(c^* - c), \quad i \in \{1, 2\},$$

beginnen in den gegebenen Ruhelagen  $\mathbf{u}_i(c^*)$  und enden im (wegzusammenhängenden) Alfvén-Kreis in den Punkten  $\mathbf{u}_i^A$ , welche sich durch einen Weg  $K_A \subset \mathfrak{V}$  verbinden lassen (durch Rotation des  $\mathbf{b}$ -Vektors).

Insgesamt erhalten wir eine Kurve  $K$  von der gewünschten Art  $\mathbf{u}_1(c^*) \rightarrow \mathbf{u}_2(c^*)$  durch Komposition der einzelnen Wegstücke, nämlich  $K = K_2^{-1} \circ K_A \circ K_1$ .<sup>1</sup> Nach Konstruktion ist dann  $c$  entlang der Kurven  $K_1^{-1}$  und  $K_2^{-1}$  eine streng monoton wachsende Funktion.

Es gilt  $b_1 > 0$  entlang der Kurve  $K_1$  und  $b_1 < 0$  entlang der Kurve  $K_2$ . Daraus folgt:

$$P(\mathbf{u}_1^A) - P(\mathbf{u}_1) = \int_{c^*}^0 \frac{dP}{dc} dc = \int_0^{c^*} b_1 dc > 0$$

$$P(\mathbf{u}_2^A) - P(\mathbf{u}_2) = \int_{c^*}^0 \frac{dP}{dc} dc = \int_0^{c^*} b_1 dc < 0$$

Nach (i) gilt

$$P(\mathbf{u}_1^A) = P(\mathbf{u}_2^A)$$

und wir erhalten schließlich durch Aneinanderreihung der Ergebnisse die gewünschte Beziehung

$$P(\mathbf{u}_1) < P(\mathbf{u}_1^A) = P(\mathbf{u}_2^A) < P(\mathbf{u}_2). \quad \blacksquare$$

<sup>1</sup>Dabei ist  $K_2^{-1}$  der Weg, der aus  $K_2$  durch Umkehrung des Durchlaufsinns entsteht.

### 3.3 Das koplanare Teilsystem

Anhand der Gleichungen erkennt man unmittelbar, dass die Menge

$$\{w_2 = b_2 = 0\} \quad (3.3)$$

invariant ist, denn es folgt  $w_2' = b_2' = 0$ .

Die Ruhelagen sind im Fall  $c > 0$  offensichtlich in dieser Menge enthalten; daher beschränken wir uns bei der Suche nach heteroklinen Orbits zunächst auf die Betrachtung des dreidimensionalen Teilsystems

$$\begin{aligned} \mu v' &= mv + p(v) + \frac{1}{2}b^2 - j \\ \nu w' &= mw - ab \\ \eta b' &= vb - aw - c, \end{aligned} \quad (\Sigma^3)$$

wobei wir im folgenden aus Bequemlichkeit

$$w := w_1 \quad \text{und} \quad b := b_1$$

schreiben.

Im Fall  $c = 0$  sind die Ruhelagen  $\mathbf{u}_0$  und  $\mathbf{u}_3$  in dieser Hyperebene enthalten und genau zwei der Zustände des Alfvén-Kreises.

Geometrisch entspricht der Übergang von  $(\Sigma^5)$  zu  $(\Sigma^3)$  der Einschränkung des Phasenraums auf die durch (3.3) definierte Ebene.

Die Gradientenstruktur bleibt erhalten und die Lyapunov-Funktion schreibt sich jetzt als

$$P(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}mw^2 + \frac{1}{2}vb^2 + q(v) - jv - abw - cb.$$

Die beiden Lemmata über die Ruhelagen von  $(\Sigma^5)$  übertragen sich auf das reduzierte System  $(\Sigma^3)$ . Dabei bleibt das erste Lemma wörtlich erhalten und im zweiten Lemma bleiben lediglich zwei der unendlich vielen Ruhelagen des Alfvén-„Kreises“ übrig.

Der Vollständigkeit halber und zu Referenzzwecken geben wir die angepassten Aussagen über die Ruhelagen von

$$\begin{aligned} mv + p(v) + \frac{1}{2}|b|^2 - j &= 0 \\ mw - ab &= 0 \\ vb - aw - c &= 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

explizit an.

**Lemma 3.3.1.**

Sei  $c > 0$  beliebig, aber fest gewählt. Dann existieren Zahlen  $j_1^*, j_2^* \in \mathbb{R}$ ,  $j_1^* \leq j_2^*$ , sodass gilt:



- (i) Für  $j \in (-\infty, j_1^*)$  besitzt das Gleichungssystem (3.1) keine Lösung.  
(ii) Für  $j \in (j_1^*, j_2^*)$  gibt es genau zwei verschiedene Zustände  $\mathbf{u}_-, \mathbf{u}_+$ , die (3.1) erfüllen, und für

$$\mathbf{u}_i = (v_i, w_i, b_i) \quad \text{mit} \quad i \in \{+, -\}$$

gilt

$$w_i = b_i = \frac{1}{v_i - d} \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_+ > v_- > 0.$$

Dabei können die beiden Fälle  $v_+ > v_- > d$  oder  $d > v_+ > v_-$  eintreten.

- (iii) Für  $j \in J_c := (j_2^*, \infty)$  gibt es genau vier verschiedene Zustände  $\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ , die (3.1) erfüllen, und für

$$\mathbf{u}_i = (v_i, w_i, b_i) \quad \text{mit} \quad i \in \{0, 1, 2, 3\}$$

gilt

$$w_i = b_i = \frac{c}{v_i - d} \quad \text{und} \quad v_0 > v_1 > d > v_2 > v_3 > 0.$$

### Lemma 3.3.2.

Für  $c = 0$  gibt es  $j_1^*, j_2^* \in \mathbb{R}$ , sodass gilt:

- (i) Ist  $j \in (j_1^*, \infty)$ , so gibt es genau zwei verschiedene Zustände  $\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_3$  mit  $v_0 > v_3$ , die (3.1) erfüllen und es ist

$$\mathbf{u}_i = (v_i, 0, 0)$$

für  $i \in \{0, 3\}$ .

- (ii) Ist  $j \in (j_2^*, \infty)$ , so gibt es genau zwei verschiedene Zustände  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$  mit

$$v_i = d, \quad mw_i = ab_i \quad \text{und} \quad b_i^2 = 2(j - (p(d) + md)),$$

die (3.4) erfüllen.

BEWEIS. Bei einer Ruhelage ist

$$mw = ab$$

erfüllt.

Ist  $c = 0$ , dann liefert die dritte Gleichung  $(v - d)b = 0$ , also  $b = 0$  oder  $v = d$ .

Ist  $b = 0$ , so hat das Magnetfeld an dieser Stelle keine transversalen Komponenten und wir erhalten aus der ersten Gleichung  $mv + p(v) = j$ .

Wenn die Bedingung

$$j > j_1^* := \min_{v>0} mv + p(v)$$

erfüllt ist, erhalten wir zwei Lösungen  $0 < v_3 < v_0$ .

Wir erhalten also für  $j > j_1^*$  genau zwei Zustände  $\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_3$ , die (3.4) lösen und deren  $v$ -Komponente  $v_0 > v_3$  erfüllt.

Ist  $v = d$ , so liefert die erste Gleichung  $md + p(d) + 1/2 |b|^2 = j$ , d.h. falls  $j > j_2^* := p(d) + md$  ist, kann  $b$  die beiden Werte

$$b_{1,2} = \pm \sqrt{2(j - (p(d) + md))}$$

annehmen, d.h. es gilt Aussage (ii). ■

Die Ungleichungen der Energie bei den Ruhelagen bleiben ebenfalls erhalten, weil die Ausdrücke der Energie bei einem Zustand  $(v, w, b)$  von  $(\Sigma^3)$  bzw.  $(v, w, 0, b, 0)$  von  $(\Sigma^5)$  identisch sind.

Das folgende Lemma stellt einen Zusammenhang zwischen den Ruhelagen der Systeme  $(\Sigma^3)$  und  $(\Sigma_0^3)$  her.

**Lemma 3.3.3.**

Sei  $j \in \mathbb{R}$  fest. Wir nehmen an, zu gegebenem  $c^* > 0$  existieren die vier Ruhelagen  $\mathbf{u}_i(c^*), i \in \{0, 1, 2, 3\}$  von  $(\Sigma^3)$ .

Dann existieren für alle  $0 \leq c \leq c^*$  die Ruhelagen und  $\mathbf{u}_i(c), i \in \{0, 1, 2, 3\}$  und es gilt

$$\lim_{c \rightarrow 0} \mathbf{u}_i(c) = \mathbf{u}_i(0).$$

BEWEIS. Das nichtlineare Gleichungssystem (3.4) besitzt nach dem Hilfssatz 3.3.1 für die gegebenen Werte von  $c$  genau vier Lösungen und die Jacobi-Matrix ist invertierbar, denn Null ist kein Eigenwert der Linearisierung (siehe Unterabschnitt 3.4.2).

Daher lässt sich der Satz über implizite Funktionen für jedes  $\tilde{c} \in [0, c^*]$  anwenden und liefert in der Nähe jeder Ruhelage genau eine glatte Funktion  $\mathbf{u}_i(c), i \in \{0, 1, 2, 3\}$ , die auf einer Umgebung von  $\tilde{c}$  definiert ist. Aufgrund der Kompaktheit von  $[0, c^*]$  genügen endlich viele solcher Funktionen, um eine eindeutig bestimmte Funktion  $\mathbf{u}_i(c)$  auf dem gesamten Intervall  $[0, c^*]$  zusammensetzen, welche insbesondere stetig ist. ■

**Bemerkung 3.3.4.**

Dieses Lemma trifft ebenfalls auf die Ruhelagen  $\tilde{\mathbf{u}}_i(c)$  und  $\tilde{\mathbf{u}}_i(0)$  der Systeme  $(\Sigma^5)$  bzw.  $(\Sigma_0^5)$  zu, allerdings ist dafür eine zusätzliche Bemerkung für  $i \in \{1, 2\}$  nötig, welches die Zustände  $\tilde{\mathbf{u}}_1(0), \tilde{\mathbf{u}}_2(0) \in A$  (siehe Satz 3.2.3) sind. Diese Frage lässt sich leicht beantworten, weil die Funktionen  $\tilde{\mathbf{u}}_i(c)$  jedenfalls gegen Ruhelagen von  $(\Sigma_0^5)$  konvergieren. Diese Grenzwerte  $\tilde{\mathbf{u}}_i(0) = (v_i, w_i^{(1)}, w_i^{(2)}, b_i^{(1)}, b_i^{(2)})$  sind (eindeutig) gegeben durch

$$w_{1,2}^{(2)}(0) = b_{1,2}^{(2)}(0) = 0 \text{ und } b_1^{(1)}(0) > 0 > b_2^{(1)}(0).$$

Die Konvergenz für das uneingeschränkte System folgt dann aus dem vorangehenden Hilfssatz und der Tatsache

$$w_{1,2}^{(2)}(c) = b_{1,2}^{(2)}(c) = 0. \quad \diamond$$

### 3.4 Das linearisierte Problem

#### 3.4.1 Linearisierung von $(\Sigma^5)$

Die Jacobi-Matrix der Vektorfeldes von  $(\Sigma^5)$  lautet:

$$\begin{pmatrix} \overbrace{\frac{1}{\mu}(m+p'(v))}^{=: \xi(v)} & 0 & 0 & \frac{1}{\mu}b_1 & \frac{1}{\mu}b_2 \\ 0 & \frac{1}{v}m & 0 & -\frac{1}{v}a & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{v}m & 0 & -\frac{1}{v}a \\ \frac{1}{\eta}b_1 & -\frac{1}{\eta}a & 0 & \frac{1}{\eta}v & 0 \\ \frac{1}{\eta}b_2 & 0 & -\frac{1}{\eta}a & 0 & \frac{1}{\eta}v \end{pmatrix}$$

Das charakteristische Polynom ist daher

$$\begin{aligned} \chi(T) &= \frac{1}{\mu\nu^2\eta^2} \begin{vmatrix} \xi - \mu T & 0 & 0 & b_1 & b_2 \\ 0 & 1 - \nu T & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \nu T & 0 & -1 \\ b_1 & -1 & 0 & v - \eta T & 0 \\ b_2 & 0 & -1 & 0 & v - \eta T \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{\mu\nu^2\eta^2} [(1 - \nu T)(v - \eta T) - 1] \\ &\quad \times [(\xi - \mu T)(1 - \nu T)(v - \eta T) - (\xi - \mu T) - (b_1^2 + b_2^2)(1 - \nu T)]. \end{aligned}$$

#### 3.4.2 Linearisierung von $(\Sigma^3)$

Die Jacobi-Matrix des Vektorfeldes von  $(\Sigma^3)$  lautet:

$$\begin{pmatrix} \overbrace{\frac{1}{\mu}(m+p'(v))}^{=: \xi(v)} & 0 & \frac{1}{\mu}b \\ 0 & \frac{1}{v}m & -\frac{1}{v}a \\ \frac{1}{\eta}b & -\frac{1}{\eta}a & \frac{1}{\eta}v \end{pmatrix}$$

Das charakteristische Polynom ist daher:

$$\chi(T) = (\xi - \mu T)(1 - \nu T)(v - \eta T) - (\xi - \mu T) - (b^2)(1 - \nu T).$$

#### 3.4.3 Die Vorzeichen der Eigenwerte

Wir bestimmen das Vorzeichen der Eigenwerte, indem wir den in [KL65] eingeschlagenen Weg auf die vorliegende Situation anpassen.

**Satz 3.4.1.**

Sind  $B$  und  $A$  reelle symmetrische Matrizen und ist  $B$  positiv definit, dann stimmen die Anzahl der positiven resp. negativen Eigenwerte von  $BA$  mit der Anzahl der positiven resp. negativen Eigenwerte von  $A$  überein.

**BEWEIS. 1. SCHRITT:** Reduktion der Behauptung auf den Spezialfall:  $A$  besitzt nur Eigenwerte ungleich Null.

Ist das zunächst nicht Fall, so betrachten wir die Einschränkung  $\tilde{A}$  von  $A$  auf die direkte Summe der Eigenräume zu positiven und negativen Eigenwerten.

Das Spektrum von  $\tilde{A}$  besteht nun genau aus den positiven und negativen Eigenwerten von  $A$  und  $\tilde{A}$  erfüllt die Voraussetzungen des Spezialfalls. Falls dieser bewiesen ist, so gilt die Behauptung offensichtlich auch für  $A$ .

**2. SCHRITT:** Beweis der Behauptung für den Spezialfall.

$A$  besitze nur von Null verschiedene Eigenwerte.

Weil  $B$  positiv definit ist, wird durch

$$M(t) = (1 - t)\text{Id} + tB \quad \text{für } t \in [0, 1]$$

ein stetiger Weg  $M : [0, 1] \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{R})$  definiert, der die Matrizen  $B$  und  $\text{Id}$  verbindet und nur aus positiv definiten Matrizen besteht. Letzteres folgt aus der positiven Definitheit von  $B$  und  $\text{Id}$ ; für  $x \neq 0$  gilt

$$\langle M(t)x, x \rangle = (1 - t) \underbrace{\langle x, x \rangle}_{=|x|^2} + t \underbrace{\langle Bx, x \rangle}_{>0} > 0.$$

Aufgrund der stetigen Abhängigkeit der Eigenwerte von den Einträgen der Matrix ist jede der Funktionen  $\lambda_i(t)$ , welche den  $i$ -ten Eigenwert von  $M(t)A$  darstellt, ebenfalls stetig.

Angenommen, die Anzahl der positiven Eigenwerte bleibt entlang dieses Weges nicht erhalten. Dann muss (aufgrund der Stetigkeit) eine der Funktionen  $\lambda_i(t)$  eine Nullstelle besitzen, d.h.  $\lambda_i(t_0) = 0$  für ein  $t_0 \in [0, 1]$ . Insbesondere ist dann

$$0 = \lambda_1(t_0) \cdots \lambda_n(t_0) = \det(M(t_0)A) = \det M(t_0) \det A,$$

also gilt  $\det M(t_0) = 0$  oder  $\det A = 0$ ; ersteres steht im WIDERSPRUCH zur positiven Definitheit von  $M(t_0)$  und letzteres im WIDERSPRUCH zu der Annahme, dass  $A$  nur von Null verschiedene Eigenwerte besitzt.

Ebenso argumentiert man, dass die Anzahl der negativen Eigenwerte erhalten bleibt. ■

**Satz 3.4.2.**

Die Parameter  $(j, c)$  seien fest und es mögen alle vier Ruhelagen  $\mathbf{u}_i, i \in \{0, 1, 2, 3\}$  existieren. Wir bezeichnen mit

$$\{\lambda_k(u)\}_{k=1, \dots, N}$$

die nach wachsender Größe geordneten Eigenwerte des Systems ( $\Sigma^N$ ) für  $N = 3$  bzw.  $N = 5$ .  
Dann gilt:

(a) Für  $N = 3$ :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & < & \lambda_1(\mathbf{u}_0) & \leq & \lambda_2(\mathbf{u}_0) & \leq & \lambda_3(\mathbf{u}_0), \\ \lambda_1(\mathbf{u}_1) & < & 0 & < & \lambda_2(\mathbf{u}_1) & \leq & \lambda_3(\mathbf{u}_1), \\ \lambda_1(\mathbf{u}_2) & < & 0 & < & \lambda_2(\mathbf{u}_2) & \leq & \lambda_3(\mathbf{u}_2), \\ \lambda_1(\mathbf{u}_3) & \leq & \lambda_2(\mathbf{u}_3) & < & 0 & < & \lambda_3(\mathbf{u}_3). \end{array}$$

(b) Für  $N = 5$ :

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & < & \lambda_1(\mathbf{u}_0) & \leq & \lambda_2(\mathbf{u}_0) & \leq & \lambda_3(\mathbf{u}_0) & \leq & \lambda_4(\mathbf{u}_0) & \leq & \lambda_5(\mathbf{u}_0), \\ \lambda_1(\mathbf{u}_1) & < & 0 & < & \lambda_2(\mathbf{u}_1) & \leq & \lambda_3(\mathbf{u}_1) & \leq & \lambda_4(\mathbf{u}_1) & \leq & \lambda_5(\mathbf{u}_1), \\ \lambda_1(\mathbf{u}_2) & \leq & \lambda_2(\mathbf{u}_2) & < & 0 & < & \lambda_3(\mathbf{u}_2) & \leq & \lambda_4(\mathbf{u}_2) & \leq & \lambda_5(\mathbf{u}_2), \\ \lambda_1(\mathbf{u}_3) & \leq & \lambda_2(\mathbf{u}_3) & \leq & \lambda_3(\mathbf{u}_3) & < & 0 & < & \lambda_4(\mathbf{u}_3) & \leq & \lambda_5(\mathbf{u}_3). \end{array}$$

**BEWEIS.** (a) **1. SCHRITT:** Das linearisierte System bei einer Ruhelage  $\mathbf{u}_k = (v_k, w_k, b_k)$  lautet

$$BU' = DU$$

mit

$$D := \begin{pmatrix} \zeta(v_k) & 0 & b_k \\ 0 & m & -a \\ b_k & -a & v_k \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad U = \begin{pmatrix} V \\ W \\ B \end{pmatrix}.$$

**2. SCHRITT:** Für die Bestimmung der Vorzeichen der Eigenwerte können wir die positiv definite Matrix  $B$  nach dem vorangehenden Satz 3.4.1 vernachlässigen.

**3. SCHRITT:** Zur Bestimmung der Vorzeichen der Eigenwerte betrachten wir die zu  $D$  gehörige quadratische Form, die wir nach linearer Transformation der Variablen als „Summe von Quadraten“ schreiben können:

$$\begin{aligned} Q(U) = & \underbrace{1}_{C_1} \cdot (c_{b,k}B + c_{b,k}V - c_{a,k}W)^2 + \underbrace{(v_k^2 - c_{a,k}^2)}_{C_2} \left( W + \frac{c_{a,k}c_{b,k}V}{v_k^2 - c_{a,k}^2} \right)^2 \\ & + \underbrace{\left( v_k^2 - a_0^2 - \frac{c_{a,k}^2 c_{b,k}^2}{v_k^2 - c_{a,k}^2} \right)}_{C_3} V^2 \end{aligned}$$

Nach dem Sylvesterschen Trägheitssatz (s.u.) haben die Koeffizienten die gleichen Vorzeichen wie die Eigenwerte.

Also gilt (beachte  $C_3 = R(v_k)$  und siehe Abschnitt über die Ruhelagen):

	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$
$\mathbf{u}_0$	+	+	+
$\mathbf{u}_1$	-	+	+
$\mathbf{u}_2$	-	+	+
$\mathbf{u}_3$	-	-	+

(b) Wird analog zu (a) bewiesen. Man kommt nach ähnlichen Umformungen zu der quadratischen Form

$$\begin{aligned}
 Q(U) &= (c_{b,k}B_1 + c_{b,k}V - c_{a,k}W_1)^2 + (c_{b,k}B_2 - c_{a,k}W_2)^2 \\
 &+ (v_k^2 - c_{a,k}^2) \left( W_1 + \frac{c_{a,k}c_{b,k}V}{v_k^2 - c_{a,k}^2} \right)^2 + (v_k^2 - c_{a,k}^2) W_2^2 \\
 &+ \underbrace{\left( v_k^2 - c_s^2 - \frac{c_{a,k}^2 c_{b,k}^2}{v_k^2 - c_{a,k}^2} \right)}_{=R(v_k)} V^2.
 \end{aligned}$$

mit den Koeffizienten

$$\begin{aligned}
 C_1 &= C_2 = 1, \\
 C_3 &= C_4 = v_k^2 - c_{a,k}^2, \\
 C_5 &= R(v_k),
 \end{aligned}$$

deren Vorzeichen bekannt sind.

	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$
$\mathbf{u}_0$	+	+	+	+	+
$\mathbf{u}_1$	-	+	+	+	+
$\mathbf{u}_2$	-	-	+	+	+
$\mathbf{u}_3$	-	-	-	+	+

■

**Bemerkung 3.4.3.**

Genauer gesagt, benutzen wir das folgende Korollar aus dem Sylvesterschen Trägheitssatz: Ist  $A$  eine symmetrische Matrix und  $S$  eine invertierbare Matrix, dann besitzen die Matrizen  $A$  und  $S^T A S$  die gleiche Anzahl positiver bzw. negativer Eigenwerte.

Nach dem Sylvesterschen Trägheitssatz gibt es invertierbare Matrizen  $U, V$ , sodass  $U^T A U$  und  $V^T S^T A S V = (S V)^T A S V$  jeweils in möglicherweise verschiedenen Normalformen

$$\text{diag} \{ +1, \dots, +1, -1, \dots, -1, 0, \dots, 0 \}$$

sind. Diese Normalformen entsprechen jedoch beide der Normalform von  $A$  und müssen daher nach dem Sylvesterschen Trägheitssatz identisch sein.  $\diamond$

## 4 Zur Existenz heterokliner Orbits

### 4.1 Existenz des Profils für den schnellen Schock

Wir verfolgen in diesem Abschnitt die Idee von P. Germain (siehe [Ger59] und [Hes84]) um zu zeigen, dass der schnelle Schock ein koplanares Profil besitzt. Zu diesem Zweck wenden wir Theorem 2.2.1 an.

**Lemma 4.1.1.**

Sei  $(y_1, y_2, y_3)^T$  ein Eigenvektor der Linearisierung von  $(\Sigma^3)$  zum kleinsten Eigenwert  $\lambda_1 < 0$ . Dann gelten bei  $\mathbf{u}_1$  entweder die Ungleichungen

$$y_1 < 0, y_2 > 0 \text{ und } y_3 > 0$$

oder die umgekehrten Ungleichungen.

BEWEIS. Sei  $Y = (y_1, y_2, y_3)^T$  ein Eigenvektor der Linearisierung zu einem Eigenwert  $\lambda$ . Dann erfüllt  $Y$  das folgende lineare Gleichungssystem:

$$0 = (\xi - \mu\lambda)y_1 + by_3 \quad (\text{I})$$

$$0 = (m - \nu\lambda)y_2 - ay_3 \quad (\text{II})$$

$$0 = by_1 - ay_2 + (v - \eta\lambda)y_3 \quad (\text{III})$$

Aus (II) folgt

$$y_3 = \frac{m - \nu\lambda}{a} y_2$$

also gilt für  $\lambda < 0$  die Gleichheit

$$\text{sign } y_3 = \text{sign } y_2.$$

Einsetzen dieser Gleichung in (III) liefert

$$by_1 + \frac{1}{a} \underbrace{((m - \nu\lambda)(v - \eta\lambda) - a)}_{=v\eta\lambda^2 - \lambda(\nu v + \eta m) + m\nu - a} y_2 = 0,$$

also gilt für  $\lambda < 0$  und  $v > d$  die Gleichheit

$$- \text{sign } b \text{ sign } y_1 = \text{sign } y_2.$$

Daraus folgt die Behauptung wegen  $\lambda_1(\mathbf{u}_1) < 0$ ,  $v_1 > d$  und  $b_1 > 0$ . ■

Wir setzen

$$\begin{aligned} G_1(\mathbf{u}) &= mv + p(v) + \frac{1}{2}b^2 - j \\ G_2(\mathbf{u}) &= m\bar{w} - ab \\ G_3(\mathbf{u}) &= vb - a\bar{w} - c \end{aligned}$$

und definieren die Menge

$$D := \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3 : v > d, G_1(\mathbf{u}) < 0, G_2(\mathbf{u}) > 0, G_3(\mathbf{u}) > 0\}.$$

**Lemma 4.1.2.**

Die Parameterwerte  $(j, c)$  seien so gewählt, dass die Ruhelagen  $\mathbf{u}_0$  und  $\mathbf{u}_1$  von  $(\Sigma^3)$  existieren. Dann gilt:

- (i)  $\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1 \in \partial D$ .
- (ii)  $D$  ist präkompakt und  $\text{cl}(D) \subset \{v > d\}$ .

**BEWEIS.** **Zu (i):** Klar, denn  $\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1$  sind die Nullstellen von  $G_1(\mathbf{u}) = G_2(\mathbf{u}) = G_3(\mathbf{u}) = 0$  in  $\{v > d\}$ .

**Zu (ii):** Sei  $\mathbf{u} \in D$ , dann gibt es Konstanten  $C_1, C_2 > 0$  mit

$$G_2(\mathbf{u}) = C_1 \quad \text{und} \quad G_3(\mathbf{u}) = C_2,$$

woraus man durch Auflösen

$$b = \frac{\frac{a}{m}C_1 + C_2 + c}{v - d} \quad \text{und} \quad \bar{w} = \frac{\frac{v}{m}C_1 + \frac{a}{m}C_2 + \frac{a}{m}c}{v - d}$$

gewinnt; also gilt  $w > 0$  und  $b > 0$ .

Durch Einsetzen der Ausdrücke für  $w, b$  in  $G_1(\mathbf{u}) \leq 0$  erhält man

$$\underbrace{mv + p(v) + \frac{\left(\frac{a}{m}C_1 + C_2 + c\right)^2}{2(v - d)^2}}_{=: F(v, C_1, C_2)} - j \leq 0.$$

Die Funktion  $F$  trat bereits (in ähnlicher Form) im Abschnitt 3.2 über die Ruhelagen auf und einige Eigenschaften sind bekannt: Diese Ungleichung definiert in  $(d, +\infty)$  ein beschränktes Intervall, dessen Randpunkte als Lösungen der Gleichung  $F(v, C_1, C_2) = 0$  auftreten. Wir bezeichnen dieses Intervall im Fall  $C_1 = C_2 = 0$  mit  $[v_-, v_+]$  und behaupten: Für alle  $\mathbf{u} \in D$  gilt  $v \in (v_-, v_+)$ .

Um das zu sehen, leiten wir  $F$  partiell nach den Parametern  $C_1, C_2$  ab:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial C_1} &= \frac{a}{m} \frac{\frac{a}{m}C_1 + C_2 + c}{(v - d)^2} > 0 \\ \frac{\partial F}{\partial C_2} &= \frac{\frac{a}{m}C_1 + C_2 + c}{(v - d)^2} > 0 \end{aligned}$$



Mit anderen Worten: Vergrößern von  $C_1$  oder  $C_2$  führt zu strikt größeren Funktionswerten von  $F$ . In  $(d, \infty) \setminus [v_-, v_+]$  gilt  $F(v, 0, 0) > 0$  und deshalb auch  $F(v, C_1, C_2) > 0$  für alle  $C_1, C_2 \geq 0$ . Daher ist das durch  $F(v, C_1, C_2) \leq 0$  in  $(d, \infty)$  definierte Intervall stets in  $[v_-, v_+]$  enthalten. Ferner ist

$$F(v_{\pm}, 0, 0) = 0 < F(v_{\pm}, C_1, C_2) \quad \text{für} \quad C_1 + C_2 > 0,$$

also gilt für  $\mathbf{u} \in D$  sogar  $v \in (v_-, v_+)$ , wie behauptet.

In  $D$  gilt  $v_- \leq v \leq v_+$  und somit sind  $b$  und  $w$  beschränkt nach den Abschätzungen

$$|b| = \frac{|C_1 + C_2 + c|}{|v - 1|} \leq \frac{|C_1 + C_2 + c|}{|v_- - 1|}$$

und

$$|w| = \frac{|vC_1 + C_2 + c|}{|v - 1|} \leq \frac{v_+ |C_1| + |C_2 + c|}{|v_- - 1|}$$

Somit ist auch der Abschluss von  $D$  beschränkt, mithin kompakt. Die Offenheit von  $D$  folgt aus der Stetigkeit der Funktionen  $G_1, G_2$  und  $G_3$ . ■

**Lemma 4.1.3.**

Wir nehmen an, die Ruhelagen  $\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1$  existieren und alle Viskositätsparameter sind positiv. Dann gibt es Zahlen  $a_1 < 0, a_2 > 0, a_3 > 0$ , mit denen gilt:

- (i) Das System  $(\Sigma^3)$  ist gradientenartig in  $D$  bezüglich

$$h(\mathbf{u}) = -(a_1 v + a_2 w + a_3 b).$$

- (ii)  $h(\mathbf{u}_0) > h(\mathbf{u}_1)$ .

- (iii) Es gibt eine Konstante  $b \in \mathbb{R}$ , sodass  $M_b \cap D \neq \emptyset$ .

BEWEIS. Die linearisierten Gleichungen bei der Ruhelage  $\mathbf{u}_1$  lauten

$$\begin{aligned} \mu V' &= (m + p'(v_1)) (V - v_1) + b_1 (B - b_1) \\ \nu W' &= m (W - w_1) - a (B - b_1) \\ \eta B' &= b_1 (V - v_1) - a (W - w_1) + v_1 (B - b_1). \end{aligned}$$

Sei  $Y := (a_1, a_2, a_3)^T$  ein Eigenvektor dieses Systems zum Eigenwert  $\lambda_1$ . Nach Lemma 4.1.1 können wir annehmen  $a_1 < 0, a_2 > 0, a_3 > 0$ . Nun definieren wir

$$h(\mathbf{u}) = -(a_1 v + a_2 w + a_3 b) = -\langle Y, \mathbf{u} \rangle.$$

**Zu (i) und (ii):** Die Behauptungen folgen unmittelbar aus den Ungleichungen

$$v_0 > v_1, b_0 < b_1, w_0 < b_1 \quad \text{sowie} \quad v' < 0, w' > 0, b' > 0.$$

**Zu (iii):** Die Gerade

$$x(t) = \mathbf{u}_1 - tY$$

(im  $\mathbb{R}^3$ ) ist für  $t \in (0, t_*)$ ,  $t_* > 0$  hinreichend klein, in  $D$  enthalten, denn  $Y$  steht transversal auf dem Rand von  $D$ : Hierfür genügt es zu bemerken, dass bei  $\mathbf{u}_1 \in \partial D$  die Relationen  $G_i(\mathbf{u}_1) = 0$  (für  $i \in \{1, 2, 3\}$ ) gelten und dort  $\nabla G_i(\mathbf{u})$  ein Normalenvektor der Tangentialebene ist. Weil  $Y$  ein Eigenvektor der Linearisierung ist, gilt mit einem Eigenwert  $\lambda \neq 0$

$$\langle Y, \nabla G_i(\mathbf{u}_1) \rangle = \lambda a_i \neq 0,$$

und daher ist  $Y$  bei  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1$  nicht tangential an  $\partial D$ .

Weiter gilt  $h(x) = h(\mathbf{u}_1) + t|Y|^2 > h(\mathbf{u}_1)$  für alle  $t > 0$ . Durch eventuelles Verkleinern von  $t_*$  kann man außerdem erreichen, dass  $h(\mathbf{u}_0) > h(x)$  gilt (wegen der Stetigkeit von  $h$ ). Mit einem  $\tilde{t} \in (0, t_*)$  und der Wahl  $b := h(\mathbf{u}_0) - h(x(\tilde{t}))$  ist die Behauptung erfüllt. ■

**Lemma 4.1.4.**

Für  $\mathbf{u} \in \partial D \setminus \{\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1\}$  gilt

$$\mathbf{u} \cdot t \notin \text{cl}(D) \text{ für kleine } t > 0 \quad \text{und} \quad \mathbf{u} \cdot t \notin \partial D \text{ für kleine } |t| > 0.$$

BEWEIS. Sei  $\mathbf{u} \in \partial D_f \setminus \{\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1\}$ . Dann gilt  $G_i(\mathbf{u}) = 0$  für ein  $i \in \{1, 2, 3\}$ . Differenzieren der Funktionen  $G_i(\mathbf{u}), i \in \{1, 2, 3\}$ , entlang von Orbits liefert:

$$G'_i(\mathbf{u}) = \langle \nabla G_i(\mathbf{u}), u'(t) \rangle,$$

also

$$\begin{aligned} G'_1(\mathbf{u})|_{G_1(\mathbf{u})=0} &= \frac{b}{\eta} G_3(\mathbf{u}) \\ G'_2(\mathbf{u})|_{G_2(\mathbf{u})=0} &= -\frac{1}{\eta} G_3(\mathbf{u}) \\ G'_3(\mathbf{u})|_{G_3(\mathbf{u})=0} &= \frac{b}{\mu} G_1(\mathbf{u}) - \frac{1}{\nu} G_2(\mathbf{u}) \end{aligned}$$

Aus diesen Relationen ergibt sich: Trifft ein Orbit zur Zeit  $t = t_0$  auf einen Randpunkt  $\mathbf{u} \in \partial D \setminus \{\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1\}$ , so ändert sich für  $t > t_0$  das Vorzeichen einer Komponente  $G_i$ , d.h. der Orbit verlässt  $D$ .

Insbesondere folgt, dass ein solcher Orbit für  $t \in (t_0 - \alpha, t_0 + \alpha)$  (mit einem genügend kleinen  $\alpha > 0$ ) nicht auf dem Rand verharrt. ■

**Theorem 4.1.5.**

Es existiert in  $D$  ein eindeutig bestimmter Orbit  $\mathbf{u}_0 \rightarrow \mathbf{u}_1$  für  $\delta > 0$ . Entlang dieses Orbits sind die Funktionen  $-v, w, b$  streng monoton wachsend.

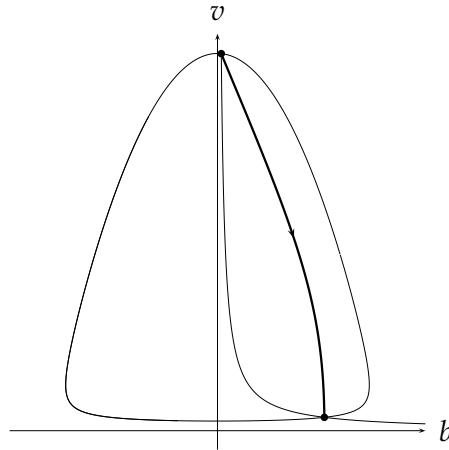


ABBILDUNG 5. Projektion der Nullclines in die  $b$ - $v$ -Ebene und der heterokline Orbit für den Fall  $a = 0$ .

**BEWEIS.** Wir betrachten das Gebiet  $U = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3 : v > d\}$ . Nach den vorangehenden Lemmata sind die Voraussetzungen an  $D$  erfüllt und Satz 2.2.1 garantiert die Existenz eines Orbits  $\mathbf{u}_0 \rightarrow \mathbf{u}_1$ .

Die stabile Mannigfaltigkeit  $\mathcal{W}^s(\mathbf{u}_1)$  ist eindimensional (denn es gibt genau einen negativen Eigenwert bei  $\mathbf{u}_1$ ) und besitzt bei  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1$  den ins Innere von  $D$  zeigenden Tangentialvektor  $Y$ , der außerdem transversal auf dem Rand von  $D$  steht (das wurde im Beweis von 4.1.3 gezeigt).

Somit ist die Eindeutigkeit gesichert, weil es in  $D$  nur eine Richtung gibt, entlang derer ein eventueller heterokliner Orbit zum Punkt  $\mathbf{u}_1$  gelangen kann.

Aus den Ungleichungen, die die Funktionen  $G_i(\mathbf{u})$  (für  $i \in \{1, 2, 3\}$ ) in  $D$  erfüllen, folgt die geforderte Monotonie der Komponenten entlang des Orbits. ■

## 4.2 Der Spezialfall $a = 0$

Die Gleichungen lauten

$$\begin{aligned} \mu v' &= mv + p(v) + \frac{1}{2}b^2 - j \\ \nu w' &= m w \\ \eta b' &= vb - c \end{aligned} \tag{4.1}$$

und man erkennt unmittelbar, dass die Differentialgleichung für  $w$  von den übrigen entkoppelt ist. Wir beginnen mit einem Hilfssatz über die Ruhelagen.

### Lemma 4.2.1.

Sei  $c \geq 0$  gegeben.

- (i) Es gibt ein  $j^* \in \mathbb{R}$ , sodass das System 4.1 für  $j \in (j^*, \infty)$  genau zwei Ruhelagen  $\mathbf{u}_\pm$  besitzt. Diese erfüllen

$$v_+ > v_- > 0, \quad w_\pm = 0 \quad \text{und} \quad 0 \leq b_+ < b_-.$$

- (ii)  $\mathbf{u}_+$  ist ein instabiler Knoten und  $\mathbf{u}_-$  ist ein Sattel.

BEWEIS. (i) Aus der Gleichung für  $w$  folgt  $w = 0$ .

Ist  $c = 0$ , so folgt  $b = 0$  und die Behauptung ergibt sich aus den Betrachtungen über die Funktion

$$v \mapsto mv + p(v) - j$$

wie in Abschnitt 3.2.

Falls  $c > 0$  gilt, dann ergibt die Gleichung  $vb - c = 0$  die Relation  $b = \frac{c}{v}$ , und Betrachtungen über die Funktion

$$f : v \mapsto mv + p(v) + \frac{c^2}{2v^2} - j$$

wie in Abschnitt 3.2 zeigen die Behauptung.

- (ii) Um die Eigenwerte zu diskutieren, betrachten wir die Linearisierung

$$D := \begin{pmatrix} m + p'(v) & 0 & b \\ 0 & m & 0 \\ b & 0 & v \end{pmatrix},$$

wobei die Viskositätskoeffizienten nach Satz 3.4.1 vernachlässigt werden können. Das charakteristische Polynom  $\tilde{\chi}(\lambda)$  von  $D$  lautet

$$\tilde{\chi}(\lambda) = (m - \lambda) \underbrace{((m + p'(v) - \lambda)(v - \lambda) - b^2)}_{=:\chi(\lambda)},$$

woraus sich unmittelbar der Eigenwert  $\lambda = m > 0$  ergibt. Es gilt

$$\chi(\lambda) = \lambda^2 - (m + p'(v) + v)\lambda + v(m + p'(v)) - b^2$$

und wie in Abschnitt 3.2 folgt

$$f'(v_-) < 0 < f'(v_+),$$

d.h.

$$m + p'(v_-) - \frac{c^2}{v_-^3} < 0 < m + p'(v_+) - \frac{c^2}{v_+^3},$$

also ist das Absolutglied

$$v(m + p'(v)) - b^2 = v \left( m + p'(v) - \frac{c^2}{v^3} \right)$$

von  $\chi(\lambda)$  positiv bei  $v = v_+$  und negativ bei  $v = v_-$ . Die Nullstellen von  $\chi(\lambda)$  bei  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_-$  besitzen verschiedene Vorzeichen, also handelt es sich bei  $\mathbf{u}_-$  um einen Sattel (denn die Linearisierung hat zwei positive und einen negativen Eigenwert). Die Nullstellen von  $\chi(\lambda)$  bei  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_+$  besitzen das gleiche Vorzeichen; um dieses zu bestimmen, beachte

$$m + p'(v_+) + v_+ > \frac{c^2}{v_+^3} + v_+ > 0,$$

also folgt mit der Lösungsformel für quadratische Gleichungen, dass beide Nullstellen positiv sind und deshalb liegt bei  $\mathbf{u}_+$  ein instabiler Knoten vor. ■

**Satz 4.2.2.**

Falls die Ruhelagen  $\mathbf{u}_\pm$  existieren, so gibt es genau einen heteroklinen Orbit  $\mathbf{u}_+ \rightarrow \mathbf{u}_-$  und dieser verläuft in der invarianten Ebene  $w = 0$ .

**BEWEIS.** Erfüllt ein Orbit  $w(t_0) \neq 0$  zu einer Zeit  $t_0$ , so kann dieser Orbit nicht heteroklin sein, denn es gilt

$$w(t) = w(t_0) \exp\left(\frac{m}{v} t\right),$$

also  $|w(t)| \rightarrow \infty$  für  $t \rightarrow -\infty$  oder  $t \rightarrow +\infty$ .

In der Ebene  $w = 0$  wird die Dynamik nur durch die Gleichungen für  $b$  und  $v$  bestimmt und diese Gleichungen erlauben einen heteroklinen Orbit der gewünschten Art. Dafür genügt der Nachweis der Existenz eines solchen Eigenvektors zum negativen Eigenwert  $\lambda := \lambda_1(\mathbf{u}_-)$ , welcher in das durch

$$mv + p(v) + \frac{1}{2}b^2 - j < 0 \quad \text{und} \quad vb - c > 0$$

definierte Gebiet  $D$  hineinzeigt.

Die Vektoren

$$t_g = \begin{pmatrix} -(m + p'(v_-)) \\ b_- \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad t_h = \begin{pmatrix} -b_- \\ v_- \end{pmatrix}$$

definieren Tangentialvektoren an die Nullclines  $g = 0$  bzw.  $h = 0$  im Punkte  $\mathbf{u}_-$ .

Ein Eigenvektor  $Z = (Z_1, Z_2)^\top \neq (0, 0)^\top$  zum Eigenwert  $\lambda$  erfüllt das homogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} bZ_1 + (v - \eta\lambda)Z_2 &= 0 \\ (m + p'(v) - \mu\lambda)Z_1 + bZ_2 &= 0. \end{aligned}$$

Bei der Ruhelage  $\mathbf{u}_-$  gilt  $b_- > 0$  und  $v_- > 0$ .

Aus der ersten bzw. zweiten Gleichung folgt, dass  $Z$  parallel zu

$$\begin{pmatrix} \mu\lambda - (m + p'(v_-)) \\ b_- \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} -b_- \\ v_- - \eta\lambda \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

sein muss und – ohne Einschränkung – darf man zusätzlich annehmen, dass  $Z$  ein positives Vielfaches von jedem dieser beiden Vektoren ist; denn: Zunächst ist  $Z$  ein beliebiger Eigenvektor, der als positives Vielfaches von  $(-b_-, v_- - \eta\lambda)^\top$  gewählt werden darf. Damit ist  $Z_2 > 0$  und daher ist  $Z$  auch positives Vielfaches von  $(\mu\lambda - (m + p'(v_-)), b_-)^\top$ .

Wir betrachten Polarkoordinaten mit dem Punkt  $\mathbf{u}_-$  als Zentrum, dabei bezeichne  $\vartheta \in [0, 2\pi)$  den gerichteten Winkel mit dem Strahl  $\mathbf{u}_- + \mathbb{R}_{>0}\mathbf{e}_1$ . Die zu den Tangentialvektoren  $t_g$  und  $t_h$  gehörigen Winkel seien mit  $\vartheta_g$  bzw.  $\vartheta_h$  bezeichnet.

Mit diesen Bezeichnungen lässt sich die Behauptung in dieser Weise formulieren: *Man zeige die Ungleichungen  $\vartheta_g < \vartheta < \vartheta_g + \pi$  und  $\vartheta < \vartheta_h$ .*

Durch Variation der Koeffizienten  $\eta$  und  $\mu$  und Vergleich der in (4.2) genannten Vektoren mit den Tangentialvektoren  $t_g$  und  $t_h$  erhält man aufgrund der gleichgerichteten Parallelität die Ungleichungen

$$\vartheta_g < \vartheta < \pi \quad \text{und} \quad \frac{\pi}{2} < \vartheta < \vartheta_h,$$

also gilt  $\vartheta_g < \vartheta$  und  $\vartheta < \vartheta_h$ . Ferner gilt  $\vartheta < \pi < \vartheta_g + \pi$  wegen  $\vartheta_g > 0$ . Weiter zeigt das Vektorfeld auf dem Rand  $\partial G \setminus \{\mathbf{u}_\pm\}$  strikt aus  $D$  heraus.

Damit folgen Existenz und Eindeutigkeit des heteroklinen Orbits: Unter Zeitumkehr finden wir einen Orbit mit  $\alpha$ -Limesmenge  $\{\mathbf{u}_-\}$ , der innerhalb von  $D$  startet und  $D$  nicht verlassen kann. Deshalb muss dieser Orbit die  $\omega$ -Limesmenge  $\{\mathbf{u}_+\}$  besitzen. Die Eindeutigkeit ergibt sich aus der Tatsache, dass  $\mathbf{u}_-$  genau einen negativen Eigenwert und genau einen in das Gebiet hineinzeigenden Eigenvektor besitzt. ■

**Bemerkung 4.2.3.**

Anhand des Phasenportraits ist (mit Vorgriff auf spätere Überlegungen) klar, dass für  $\frac{\eta}{\mu} \rightarrow 0$  keine Subshocks und für  $\frac{\mu}{\eta} \rightarrow 0$  genau dann Subshocks auftreten, wenn

$$\text{sign } m + p'(v_-) \neq \text{sign } m + p'(v_+)$$

gilt. ◇

### 4.3 Der Spezialfall $c = 0$

In diesem Abschnitt zeigen wir, dass sich die in [Hes84] für den nichtisothermen Fall durchgeführten Untersuchungen auf den isothermen Fall übertragen lassen und ähnliche Resultate liefern. Das bedeutet, dass die sogenannten *Einschalt-* und *Ausschalt-*Schocks Profile besitzen und damit physikalisch zulässig sind.

Wir erinnern zunächst an die Gleichungen des Systems ( $\Sigma_0^3$ )

$$\mu v' = mv + p(v) + \frac{1}{2}b^2 - j =: g(v, b)$$

$$v w' = mw - ab$$

$$\eta b' = vb - aw$$

und an das Lemma 3.2.1 über die Ruhelagen:

Für  $c = 0$  gibt es ein  $j^* \in \mathbb{R}$ , sodass es für jedes  $j \in (j^*, \infty)$  vier Ruhelagen  $\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$  gibt mit den folgenden Eigenschaften:

- $v_0 > d > v_3$ .
- $v_1 = v_2 = d$  und  $b_{1,2}^2 = 2(j - md - p(d))$ .
- Die Energie bei den Ruhelagen erfüllt:

$$P(\mathbf{u}_0) < P(\mathbf{u}_1) = P(\mathbf{u}_2) < P(\mathbf{u}_3)$$

Das folgende Theorem beschreibt die heterokline Bifurkation im Spezialfall  $c = 0$ .

**Theorem 4.3.1.**

- (i) Ist  $\mu, \nu, \eta > 0$ , dann gibt es die Orbits  $0 \rightarrow 1, 0 \rightarrow 2, 1 \rightarrow 3$  und  $2 \rightarrow 3$ .
- (ii) Ist  $\mu + \nu + \eta > 0$ , dann hat  $1 \rightarrow 2$  kein Profil.
- (iii) Ist  $\mu > 0$ , dann hat  $0 \rightarrow 3$  ein Profil.
- (iv) Für die Fälle, in denen genau ein Viskositätskoeffizient verschwindet, existieren nur folgende Orbits:  
 $\mu > 0, \nu > 0, \eta = 0: 0 \rightarrow 1, 0 \rightarrow 2, 1 \rightarrow 3, 2 \rightarrow 3, 0 \rightarrow 3$  (einparametrische Schar)  
 $\mu > 0, \nu = 0, \eta > 0: 0 \rightarrow 1, 0 \rightarrow 2, 1 \rightarrow 3, 2 \rightarrow 3, 0 \rightarrow 3$  (einparametrische Schar)
- (v) Für die Fälle, in denen genau zwei Viskositätskoeffizienten verschwinden, existieren nur folgende Orbits:  
 $\mu > 0, \nu = 0, \eta = 0: 0 \rightarrow 3$   
 $\mu = 0, \nu = 0, \eta > 0:$   
 Falls  $m + p'(v_1) = m + p'(v_2) > 0$  [ $< 0$ ] ist, so gibt es genau die Orbits  $0 \rightarrow 1$  und  $0 \rightarrow 2$  [ $1 \rightarrow 3$  und  $2 \rightarrow 3$ ].

Wir zeigen in Vorbereitung des Beweises des Theorems einige Hilfsresultate über das

System  $(\Sigma_0^2)$  mit den Gleichungen

$$\begin{aligned}\mu v' &= mv + p(v) + \frac{1}{2}b^2 - j = g(v, b) \\ \eta b' &= (v - d)b =: h(v, b),\end{aligned}$$

welches durch  $v = 0$  aus  $(\Sigma_0^3)$  hervorgeht.

**Lemma 4.3.2.**

(i) Die Linearisierung lautet:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\eta} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\mu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v - d & b \\ b & m + p'(v) \end{pmatrix}.$$

(ii) Es gibt Eigenvektoren  $Z = (Z_1, Z_2)^\top$  zum negativen Eigenwert  $\lambda_1(u_1)$  bzw. zum positiven Eigenwert  $\lambda_2(u_1)$ , die in das Gebiet  $\{g(v, b) < 0\} \cap \{v > d, b > 0\}$  bzw. in  $\{g(v, b) < 0\} \cap \{v < d, b > 0\}$  hineinzeigen.

*Hinweis:* Abweichend von der Notation in  $(\Sigma^2)$  benutzen wir nun die Bezeichnung  $(b, v)$  (anstelle von  $(v, b)$ ) für Punkte des Phasenraums.

BEWEIS. (i) Durch Nachrechnen in  $(\Sigma^2)$ .

(ii) Ein Eigenvektor  $Z = (Z_1, Z_2)^\top \neq (0, 0)^\top$  zum Eigenwert  $\lambda$  erfüllt das homogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned}bZ_1 + (v - d - \eta\lambda)Z_2 &= 0 \\ (m + p'(v) - \mu\lambda)Z_1 + bZ_2 &= 0,\end{aligned}$$

dessen Gleichungen abhängig sind.

Wir betrachten Eigenvektoren zu einem Eigenwert  $\lambda(u_1)$  bei der Ruhelage  $u_1$ ; dort gelten  $b_1 > 0$  und  $v_1 = d$ . Aus der ersten bzw. zweiten Gleichung folgt, dass  $Z$  parallel zu

$$\begin{pmatrix} m + p'(v) - \mu\lambda \\ -b_1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} -b_1 \\ -\eta\lambda \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

sein muss. Durch Vergleich mit den Tangentialvektoren

$$t_g := \begin{pmatrix} m + p'(v_1) \\ -b_1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad t_h := \begin{pmatrix} -b_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

der Nullclines  $g = 0$  bzw.  $h = 0$  ergibt sich, dass die Eigenvektoren nicht tangential zu den Nullclines verlaufen.

Wir betrachten Polarkoordinaten mit dem Punkt  $u_1$  als Zentrum, dabei bezeichne  $\vartheta \in [0, 2\pi)$  den gerichteten Winkel mit dem Strahl  $u_1 + \mathbb{R}_{>0}e_1$ . Der zu den Vektoren  $-t_g$  bzw.  $t_h$  gehörige Winkel sei mit  $\vartheta_g$  bzw.  $\vartheta_h$  bezeichnet. Offensichtlich ist  $\vartheta_h = \pi$ .



Sei  $\lambda < 0$ . Durch Vergleich mit den Tangentialvektoren und Betrachtung der Grenzfälle  $\mu \rightarrow 0$ ,  $\eta \rightarrow 0$ ,  $\mu \rightarrow \infty$  und  $\eta \rightarrow \infty$  erhält man für den zu einem Eigenvektor  $Z$  gehörigen Winkel  $\vartheta$  die Ungleichungen

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} < \vartheta < \vartheta_h = \pi & \text{ wegen } t_h \\ \vartheta_g < \vartheta < \pi & \text{ wegen } t_g, \end{aligned}$$

also zusammen genommen

$$\vartheta_g \leq \max \left\{ \frac{\pi}{2}, \vartheta_g \right\} < \vartheta < \pi,$$

weil  $Z$  parallel zu beiden Vektoren in 4.3 ist. Analoges Vorgehen liefert die Behauptung für  $\lambda > 0$ . ■

BEWEIS (DES THEOREMS). (i) Wir benutzen das Theorem 2.2.2, dessen Voraussetzungen durch Lemma 3.3.3 und das Theorem 4.6.4 über die Existenz des schnellen und langsamen Orbit für  $c > 0$  gesichert sind. Das impliziert die Existenz von Orbits  $0 \rightarrow 1$  und  $2 \rightarrow 3$ .

Ist  $\mathbf{u}(t) = (v(t), w(t), b(t))$  ein Orbit  $0 \rightarrow 1$  bzw.  $2 \rightarrow 3$  des Systems  $(\Sigma_0^3)$ , dann ist aus Symmetriegründen auch  $\mathbf{u}(t) = (v(t), -w(t), -b(t))$  ein heterokliner Orbit des Systems  $(\Sigma_0^3)$  vom Typ  $0 \rightarrow 2$  bzw.  $1 \rightarrow 3$ .

(ii) Die Energie

$$P(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}mw^2 + \frac{1}{2}vb^2 + q(v) - jv - abw$$

ist im Fall  $\mu + \nu + \eta > 0$  entlang von nichtkonstanten Orbits eine streng wachsende Funktion. Wegen  $P(\mathbf{u}_1) = P(\mathbf{u}_2)$  kann es also keinen Orbit  $1 \rightarrow 2$  geben.

(iii) Die Ebene  $\{w = b = 0\}$  ist invariant für das System  $(\Sigma_0^3)$  und enthält die beiden Ruhelagen  $\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_3$ . Dann folgt die Existenz des Orbits aus bekannten Resultaten über die Gasdynamik (vgl. [Gil51]).

(iv) Die Beweise der beiden Fälle  $\nu = 0$  und  $\eta = 0$  sind sich sehr ähnlich und daher beschränken wir uns auf den Fall  $\nu = 0$ ; der Beweis besteht aus einer Analyse des Phasenportraits.

Aufgrund der (in (i) erwähnten) Symmetrie genügt es, sich auf den Bereich  $\{b \geq 0\}$  zurückzuziehen und die dort erhaltenen Ergebnisse zu übertragen.

Nach dem Lemma 4.4.3 ist die Existenz eines Eigenvektors gesichert, welcher zum positiven Eigenwert  $\lambda_2(\mathbf{u}_1)$  gehört und in das Gebiet

$$\{g(v, b) < 0\} \cap \{v < d, b > 0\}$$

hineinzeigt. Also gibt es einen Orbit  $\Gamma_1^u$  mit  $\alpha$ -Limesmenge  $\{\mathbf{u}_1\}$ , der im Gebiet

$$\{g(v, b) < 0\} \cap \{v < d, b > 0\}$$

beginnt, welches aufgrund des Verhaltens des Vektorfeldes auf dem Rand nicht verlassen werden kann. Weil das System gradientenartig ist, muss die  $\omega$ -Limesmenge aus einer einzelnen Ruhelage bestehen; die einzige Ruhelage, die  $\Gamma_1^u$  erreichen kann, ist  $\mathbf{u}_3$ . Somit existiert ein heterokliner Orbit  $1 \rightarrow 3$ .

Unter Zeitumkehr zeigt eine ähnliche Argumentation die Existenz eines Orbits  $\Gamma_1^s : 0 \rightarrow 1$ . Dabei wird die Existenz eines Eigenvektors, der in das Gebiet

$$\{g(v, b) < 0\} \cap \{v > d, b > 0\}$$

zeigt, benutzt.

Die instabile und stabile Mannigfaltigkeit von  $\mathbf{u}_1$  sind jeweils eindimensional und daher sind die Orbits  $\Gamma_1^u$  und  $\Gamma_1^s$  eindeutig.

Jeder Punkt, der sich innerhalb des von  $\Gamma_1^u, \Gamma_1^s$  und  $b = 0$  eingeschlossenen Bereiches befindet, liegt auf einem Orbit  $\gamma$ , welcher dieses Gebiet nicht über den Rand verlassen kann und welcher die Ruhelage  $\mathbf{u}_1$  weder als  $\alpha$ - noch als  $\omega$ -Limesmenge haben kann (sonst müsste dieser Orbit Teil von  $\Gamma_1^u$  oder  $\Gamma_1^s$  sein). Daher ist  $\gamma$  heteroklin bezüglich  $\mathbf{u}_0$  und  $\mathbf{u}_3$ .

Die Übertragung dieser Resultate auf den Bereich  $\{b < 0\}$  liefert die behauptete Aussage.

- (v) Ist  $v = 0$  und  $\eta = 0$ , so ist das dynamische System auf die invariante Gerade  $b = 0$  eingeschränkt, welche die Ruhelagen  $\mathbf{u}_0$  und  $\mathbf{u}_3$  enthält. Man liest aus der Differentialgleichung für  $v$  ab, dass  $v' < 0$  im Bereich  $v \in (v_3, v_0)$  gilt, d.h. der behauptete heterokline Orbit existiert.

Gilt  $v = 0$  und  $\mu = 0$  so ist das dynamische System auf die invariante Menge  $G$ , gegeben durch  $g(v, b) = 0$ , eingeschränkt. Ein heterokliner Orbit  $i \rightarrow j$  existiert genau dann, wenn die beiden Punkte auf  $G$  benachbarte Ruhelagen sind und die Vorzeichen  $\text{sign } m + p'(v_i) = \text{sign } m + p'(v_j)$  übereinstimmen.

Aus dieser Charakterisierung ergibt sich mit den bekannten Tatsachen  $m + p'(v_0) > 0$  und  $m + p'(v_3) < 0$ :

Falls  $m + p'(v_1) = m + p'(v_2) > 0$  gilt, dann existieren die Orbits  $0 \rightarrow 1$  und  $0 \rightarrow 2$ .

Falls  $m + p'(v_1) = m + p'(v_2) < 0$  gilt, dann existieren die Orbits  $1 \rightarrow 3$  und  $2 \rightarrow 3$ . ■

### Folgerung 4.3.3.

Es gibt ein  $c_0 > 0$ , sodass für  $c < c_0$  kein Orbit  $1 \rightarrow 2$  existiert.

**BEWEIS.** Die rechte Seite des Systems ( $\Sigma^3$ ) ist glatt bezüglich  $j$  und  $c$ ; folglich hängen die Orbits stetig von diesen Parametern ab. Angenommen, es gäbe ein solches  $c_0 > 0$  nicht; d.h. es gibt eine Nullfolge  $c_n \rightarrow 0$  und es existieren die Orbits  $u_1(c_n) \rightarrow u_2(c_n)$  für jedes  $n$ . Aufgrund der Stetigkeit muss es dann auch für  $c = 0$  einen Orbit  $1 \rightarrow 2$  geben – im WIDERSPRUCH zum vorangehenden Theorem. ■

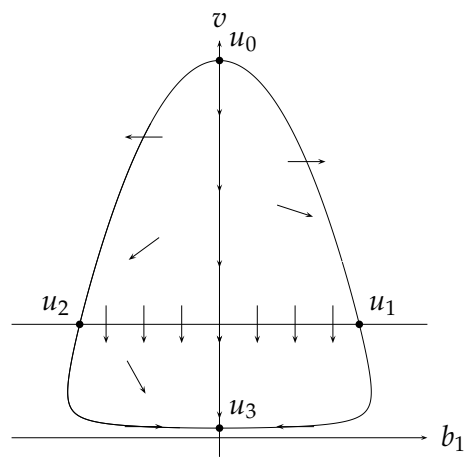


ABBILDUNG 6. Darstellung der in die  $b_1$ - $v$ -Ebene projizierten Nullclines, der Ruhelagen und des Vektorfeldes an einigen Stellen für den Spezialfall  $c = 0$ .

## 4.4 Untersuchung singulärer Spezialfälle

In diesem Abschnitt werden Spezialfälle diskutiert, in denen wenigstens einer der Viskositätsparameter einen der Grenzfälle 0 oder  $\infty$  annimmt. Das ist mit einer Vereinfachung der Gleichungen oder der Dynamik verbunden, wie etwa die Entkopplung in ein *schnelles* und eine *langsames* System (siehe Abschnitt 2.4). Häufig können dann interessante Aussagen über die Existenz heterokliner Orbits mithilfe einer elementaren Analyse des Phasenportraits gezeigt werden.

### 4.4.1 Der Spezialfall $\nu = 0$

Dieser Spezialfall ist für das Verständnis der Bifurkation wichtig, weil er eine vollständige Beschreibung erlaubt und sich die Ergebnisse mithilfe von Resultaten der singulären Störungstheorie auch auf das Regime  $0 < \nu \ll \min(\eta, \mu)$  übertragen lassen (siehe Abschnitt 4.5).

#### Hilfssätze

Setzt man  $\nu = 0$  in das System  $(\Sigma^3)$  ein, so wird aus der Differentialgleichung für  $w$  die Nebenbedingung

$$mw = ab;$$

das bedeutet, die Dynamik des Systems ist auf die Ebene  $mw - ab = 0$  im Phasenraum restringiert und das reduzierte Problem ist somit nur zweidimensional. Dessen Gleichungen lauten

$$\begin{aligned} \mu v' &= mv + p(v) + \frac{1}{2}b^2 - j =: g(v, b) \\ \eta b' &= (v - d)b - c =: h(v, b). \end{aligned} \tag{\Sigma^2}$$

Wir beginnen mit einem Hilfssatz, der das Aussehen der Nullclines beschreibt.

#### **Lemma 4.4.1.**

- (i) Die implizite Gleichung  $g(v, b) = 0$  definiert eine glatte Kurve. Sie lässt sich in den Bereichen  $\{(b, v) : b > 0\}$  und  $\{(b, v) : b < 0\}$  nach  $b$  auflösen und sie lässt sich in den Bereichen  $\{(b, v) : m + p'(v) > 0\}$  und  $\{(b, v) : m + p'(v) < 0\}$  nach  $v$  auflösen.
- (ii) Die Gleichung  $h(v, b) = 0$  definiert eine Hyperbel in der  $(v, b)$ -Ebene mit den Asymptoten  $v = d$  und  $b = 0$ .

BEWEIS. (i) Wir betrachten die implizite Gleichung

$$0 = mv + p(v) + \frac{1}{2}b^2 - j,$$

deren rechte Seite eine in  $\{(b, v) : v > 0\}$  beliebig oft differenzierbare Funktion darstellt. Wegen  $p(v) \rightarrow +\infty$  für  $v \rightarrow 0$  befinden sich alle Lösungen der Glei-

chung in der Menge  $\{(b, v) : v > 0\}$ . Durch Ableiten nach  $v$  gewinnt man

$$0 = m + p'(v) + b \frac{\partial b}{\partial v}.$$

Der Übergang zur Ableitung ist zulässig, weil die definierende implizite Gleichung (im Bereich  $\{v > 0\}$ ) differenzierbar ist und in jedem Punkt mit  $b \neq 0$  einen vom Nullvektor verschiedenen Gradienten besitzt, weshalb man lokal nach  $b$  auflösen kann und eine ebenfalls glatte Funktion  $b = \beta(v)$  erhält.

Also:

$$\frac{\partial \beta}{\partial v} = -\frac{1}{\beta} (m + p'(v)).$$

Gemäß der angenommenen Eigenschaften an die Funktion  $p(v)$  existiert genau  $v_* > 0$  mit  $m + p'(v_*) = 0$  und es gilt  $\text{sign}(m + p'(v)) = \text{sign}(v - v_*)$ .

Aus dieser Relation liest man ab, dass die Funktion  $b = \beta(v)$  auf  $(v_-, v_*)$  streng monoton wächst und auf  $(v_*, v_+)$  streng monoton fällt.

Ebenso erhält man die Auflösbarkeit nach  $v$ : In den Bereichen

$$\{(b, v) : m + p'(v) > 0\}$$

bzw.

$$\{(b, v) : m + p'(v) < 0\}$$

ist die  $v$ -Komponente

$$\frac{\partial g}{\partial v} = m + p'(v)$$

des Gradienten von Null verschieden und der Gradient besitzt daher maximalen Rang, also lässt sich die implizite Gleichung in den genannten Bereichen nach  $v$  auflösen.

(ii) Das ist aus der Gleichung  $h(v, b) = (v - d)b - c$  ersichtlich. ■

#### Bemerkung 4.4.2.

(i) Die Bedingung

$$m + p'(v) = 0 \quad (*)$$

wird bei der weiteren Diskussion über das Auftreten heterokliner Orbits gelegentlich eine Rolle spielen. Deshalb demonstrieren wir an dieser Stelle ihre einfache physikalische Bedeutung.

Sei  $\tilde{p}(\rho)$  ein Gasgesetz, mit welchem  $p(v) = \tilde{p}(m/v)$  gilt, dann folgt (siehe Unterabschnitt 1.4.2)

$$c_s^2 = \frac{d\tilde{p}(\rho)}{d\rho}.$$

Damit lässt sich Bedingung (\*) wie folgt umformen

$$0 = m + p'(v) = m + \frac{d}{dv} \left( \tilde{p} \left( \frac{m}{v} \right) \right) = m + \tilde{p}' \left( \frac{m}{v} \right) \left( -\frac{m}{v^2} \right)$$

und daraus ergibt sich die äquivalente Relation

$$v^2 = c_s^2.$$

Aus der gleichen Rechnung lässt sich ablesen:

$$m + p'(v) > 0 [m + p'(v) < 0] \iff v > c_s [v < c_s].$$

Man sieht leicht, dass stets  $m + p'(v_0) > 0$  und  $m + p'(v_3) < 0$  gelten, wenn alle vier Ruhelagen existieren.

- (ii) Wir notieren an dieser Stelle einige Bezeichnungen, die im Folgenden benutzt werden.

$$\begin{aligned} G &:= \{(v, b) : g(v, b) = 0\} \\ G^+ &:= G \cap \{(v, b) : m + p'(v) > 0\} \\ G^- &:= G \cap \{(v, b) : m + p'(v) < 0\} \\ H &:= \{(v, b) : h(v, b) = 0\} \\ H^+ &:= H \cap \{(v, b) : b > 0\} \\ H^- &:= H \cap \{(v, b) : b < 0\} \end{aligned} \quad \diamond$$

Wir fassen Aussagen über die Gestalt der Ruhelagen, die Linearisierung sowie über Eigenwerte und Eigenvektoren in einem Hilfssatz zusammen.

**Lemma 4.4.3.**

- (i) Sei  $c > 0$  beliebig, aber fest gewählt. Dann existiert eine Zahl  $j^* \in \mathbb{R}$ , sodass das System  $(\Sigma^2)$  für  $j \in (j^*, \infty)$  genau vier verschiedene Ruhelagen  $u_0, u_1, u_2, u_3$  besitzt. Für die Ruhelagen  $u_i = (v_i, b_i)$  gilt mit  $i \in \{0, 1, 2, 3\}$

$$b_i = \frac{c}{v_i - d} \quad \text{und} \quad v_0 > v_1 > d > v_2 > v_3 > 0.$$

- (ii) Die Linearisierung lautet:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\eta} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\mu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v - d & b \\ b & m + p'(v) \end{pmatrix}.$$

- (iii)  $u_0$  ist ein instabiler Knoten,  $u_1$  sowie  $u_2$  sind Sattelpunkte und  $u_3$  ist ein stabiler Knoten.  
(iv) Die Eigenvektoren  $Z = (Z_1, Z_2)$  zum positiven Eigenwert  $\lambda_2(u_1)$  und zum negativen Eigenwert  $\lambda_1(u_2)$  sind nicht tangential an  $g = 0$  oder  $h = 0$  und verlaufen weder horizontal noch vertikal.  
(v) Es gibt Eigenvektoren zu  $\lambda_2(u_1)$  und  $\lambda_1(u_2)$ , die in das Gebiet  $\{g < 0, h < 0\}$  hineinzeigen.

*Hinweis:* Abweichend von der Notation in  $(\Sigma^2)$  benutzen wir nun die Bezeichnung  $(b, v)$  (anstelle von  $(v, b)$ ) für Punkte des Phasenraums.

BEWEIS. (i) Folgt direkt aus dem Lemma 3.3.1 über die Ruhelagen  $\mathbf{u}_i = (v_i, w_i, b_i)$  von  $(\Sigma^3)$ , denn diese erfüllen ohnehin  $mw_i - ab_i = 0$ .

(ii) Durch Nachrechnen in  $(\Sigma^2)$ .

(iii) Nach Satz 3.4.1 können wir für die Bestimmung der Vorzeichen der Eigenwerte die Viskositätskoeffizienten vernachlässigen. Das charakteristische Polynom lautet

$$\chi(\lambda) = \lambda^2 - ((v-d) + (m + p'(v)))\lambda + ((v-d)(m + p'(v)) - b^2).$$

Genau wie im Abschnitt 3.2 zeigt man, dass für

$$f(v) = mv + p(v) + \frac{1}{2} \frac{c^2}{(v-d)^2} - j$$

gilt:  $f'(v_{0,2}) > 0$  und  $f'(v_{1,3}) < 0$ .

Mit dieser Information können wir das Vorzeichen des Absolutgliedes von  $\chi(\lambda)$  bestimmen:

$$a_0 := (v-d)(m + p'(v)) - b^2 = (v-d) \left( m + p'(v) - \frac{c^2}{(v-d)^3} \right).$$

Mit

$$f'(v) = m + p'(v) - \frac{c^2}{(v-d)^3}$$

folgt dann  $a_0 > 0$  für  $v \in \{v_{0,3}\}$  und  $a_0 < 0$  für  $v \in \{v_{1,2}\}$ . Somit sind  $u_{1,2}$  Sattelpunkte und bei  $u_{0,3}$  besitzen beide Eigenwerte dasselbe Vorzeichen.

Weiter gilt

$$m + p'(v_0) + (v_0 - d) > \frac{c^2}{(v_0 - d)^3} + (v_0 - d) > 0$$

und

$$m + p'(v_3) + (v_3 - d) < \frac{c^2}{(v_3 - d)^3} + (v_3 - d) < 0,$$

also handelt es sich bei  $u_0$  um einen instabilen Knoten und bei  $u_3$  um einen stabilen Knoten, wie behauptet.

(iv) Ein Eigenvektor  $Z = (Z_1, Z_2)^T \neq (0, 0)^T$  zum Eigenwert  $\lambda$  erfüllt das homogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} bZ_1 + (v-d-\eta\lambda)Z_2 &= 0 \\ (m+p'(v)-\mu\lambda)Z_1 + bZ_2 &= 0, \end{aligned}$$

dessen Gleichungen abhängig sind.

Wir betrachten Eigenvektoren zum Eigenwert  $\lambda_2(u_1) > 0$ . Bei der Ruhelage  $u_1$  gilt nach (i):  $b_1 > 0, v_1 > d$ .

Aus der ersten bzw. zweiten Gleichung folgt, dass  $Z$  parallel zu

$$\begin{pmatrix} m + p'(v) - \mu\lambda_2 \\ -b_1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} -b_1 \\ v_1 - d - \eta\lambda_2 \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

sein muss. Durch Vergleich mit den Tangentialvektoren

$$t_g := \begin{pmatrix} m + p'(v_1) \\ -b_1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad t_h := \begin{pmatrix} -b_1 \\ v_1 - d \end{pmatrix}$$

der Nullclines  $g = 0$  bzw.  $h = 0$  ergibt sich, dass die Eigenvektoren nicht tangential zu den Nullclines verlaufen.

Ferner berechnet man

$$(A - \lambda_2(u_1))e_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\eta}(v_1 - d) \\ \frac{1}{\mu}b_1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad (A - \lambda_2(u_1))e_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\eta}b_1 \\ \frac{1}{\mu}(m + p'(v_1)) \end{pmatrix}$$

und liest ab, dass die Standardbasisvektoren  $e_1$  und  $e_2$  (wegen  $v_1 - d > 0$  bzw.  $b_1 > 0$ ) keine Eigenvektoren zum Eigenwert  $\lambda_2(u_1) \neq 0$  sein können.

Analoges Vorgehen liefert die Behauptung für Eigenvektoren zu  $\lambda_1(u_2)$ .

- (v) Wiederum aufgrund der Analogie beider Fälle beschränken wir uns auf einen zum Eigenwert  $\lambda_1(u_2)$  gehörigen Eigenvektor. Wir betrachten Polarkoordinaten mit dem Punkt  $u_1$  als Zentrum, dabei bezeichne  $\vartheta \in [0, 2\pi)$  den gerichteten Winkel mit dem Strahl  $u_1 + \mathbb{R}_{>0}e_1$ . Der zu den in (iv) eingeführten Vektoren  $-t_g$  bzw.  $t_h$  gehörige Winkel sei mit  $\vartheta_g$  bzw.  $\vartheta_h$  bezeichnet.

Durch Vergleich mit den Tangentialvektoren und Betrachtung der Grenzfälle  $\mu \rightarrow 0, \eta \rightarrow 0, \mu \rightarrow \infty$  und  $\eta \rightarrow \infty$  erhält man für den zu einem Eigenvektor  $Z$  gehörigen Winkel  $\vartheta$  die Ungleichungen

$$\begin{aligned} \vartheta_h < \vartheta < \frac{3}{2}\pi & \quad \text{wegen } t_h \\ \pi < \vartheta < \vartheta_g & \quad \text{wegen } t_g, \end{aligned}$$

also zusammen genommen

$$\vartheta_h < \pi < \vartheta < \min \left\{ \frac{3}{2}\pi, \vartheta_g \right\},$$

weil  $Z$  parallel zu beiden Vektoren in (4.4) ist. Damit haben wir alles gezeigt. ■



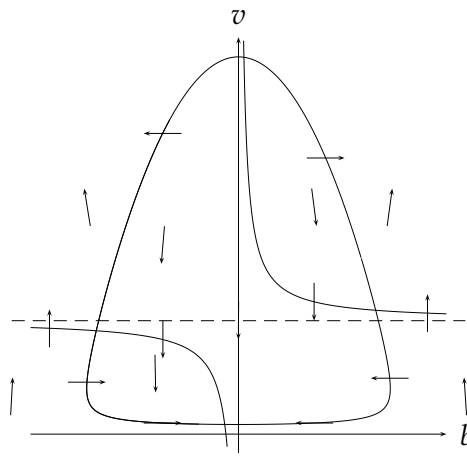


ABBILDUNG 7. Visualisierung des Vektorfeldes von  $(\Sigma^2)$  für  $\frac{\mu}{\eta} \approx 0.05$ .

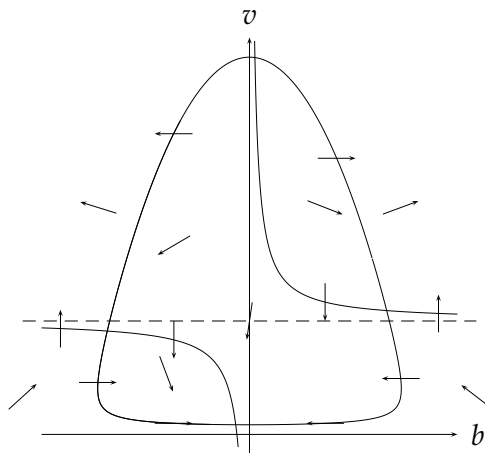


ABBILDUNG 8. Visualisierung des Vektorfeldes von  $(\Sigma^2)$  für  $\frac{\mu}{\eta} \approx 1.0$ .

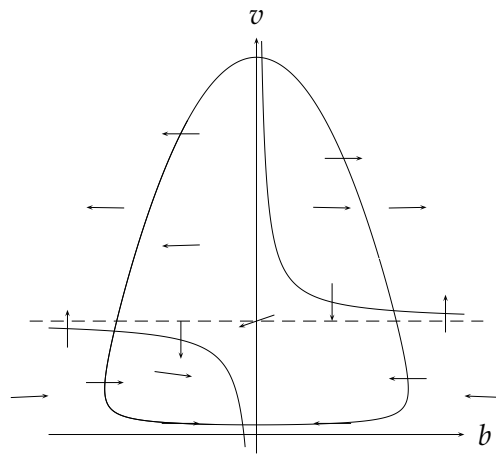


ABBILDUNG 9. Visualisierung des Vektorfeldes von  $(\Sigma^2)$  für  $\frac{\mu}{\eta} \approx 20.0$ .

### Die globale Bifurkation

Wir nehmen im Folgenden an, die Parameter  $j \in \mathbb{R}$  und  $c \in (0, +\infty)$  seien so gewählt, dass es genau vier Ruhelagen gibt. Das folgende Theorem, welches an [FS95, Lemma 5.1] angelehnt ist, liefert eine vollständige Beschreibung der globalen Bifurkation.

#### Theorem 4.4.4.

Seien  $\mu > 0$  und  $\eta > 0$ . Dann gibt es ein  $\tilde{\omega} > 0$ , mit welchem gilt:

- (i) Ist  $\mu/\eta < \tilde{\omega}$ , so existieren nur die Orbits  $0 \rightarrow 1, 0 \rightarrow 2, 0 \rightarrow 3, 1 \rightarrow 3, 2 \rightarrow 3$ .
- (ii) Ist  $\mu/\eta = \tilde{\omega}$ , so existieren nur die Orbits  $0 \rightarrow 1, 1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 3$ .
- (iii) Ist  $\mu/\eta > \tilde{\omega}$ , so existieren nur die Orbits  $0 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 3$ .

BEWEIS. **1. SCHRITT: Vorbereitung.**

Wir betrachten das Rechteck

$$R = [b_2, b_1] \times (0, \bar{v}]$$

mit einem  $\bar{v} > \sup \{g^+(b) : b_2 \leq b \leq b_1\}$ . Aus der Richtung des Vektorfeldes bei Randpunkten liest man ab: Unabhängig von  $\mu/\eta$  treten die Orbits über das Randstück

$$(\partial R)^+ = \{b_2\} \times (v_2, \bar{v}] \cup [b_2, b_1] \times \{\bar{v}\} \cup \{b_1\} \times (v_1, \bar{v}]$$

aus  $R$  aus und über das Randstück

$$(\partial R)^- = \{b_2\} \times (0, v_2) \cup \{b_1\} \times (0, v_1)$$

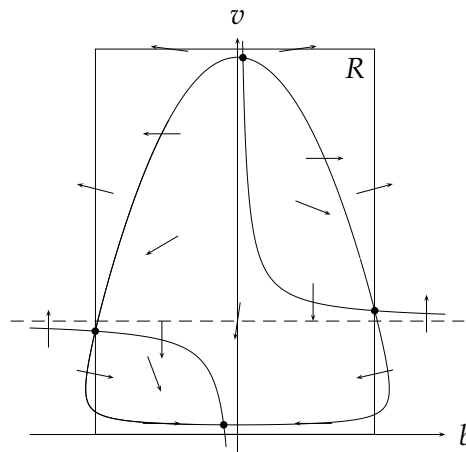


ABBILDUNG 10. Darstellung der Nullclines, des Vektorfeldes an einigen Punkten und des Rechtecks  $R$  (wie im Beweis von Theorem 4.4.4).

in  $R$  ein.

Im Folgenden werden die in Bemerkung 4.4.2, (ii) eingeführten Bezeichnungen  $G$ ,  $G^\pm$ ,  $H$  und  $H^\pm$  benutzt.

Es gibt eindeutige Orbits  $\Gamma_i^u$  und  $\Gamma_i^s$  (mit  $i \in \{1, 2\}$ ), die im Inneren von  $R$  beginnen und  $\{u_i\}$  als  $\alpha$ - bzw.  $\omega$ -Limesmenge besitzen; diese Orbits sind Teile der eindimensionalen stabilen bzw. instabilen Mannigfaltigkeit und verlaufen nicht horizontal, nicht vertikal und nicht tangential zu einer der Nullclines (nach Lemma 4.4.3).

## 2. SCHRITT: Der Fall $\eta/\mu \gg 1$ .

In diesem Fall existiert eine eindimensionale, anziehende invariante Mannigfaltigkeit nahe  $G^-$ , die  $u_3$  enthält. Für den auf  $\Gamma_3$  eingeschränkten Fluss ist  $u_3$  eine anziehende Ruhelage. Bezeichne  $\Gamma_3^+$  den Teil von  $\Gamma_3$  mit  $b_3 \leq b \leq b_1$ .

Es gilt  $\Gamma_3^+ \subset \{v > 0\}$ , denn entweder  $u_1$  oder Punkte seiner fast vertikalen instabilen Mannigfaltigkeit liegen beliebig nah bei  $\Gamma_3$ , falls nur  $\eta/\mu$  groß genug ist.

Folglich gelangt die fast vertikale, stark instabile Mannigfaltigkeit von  $u_0$  in den Anziehungsbereich von  $\Gamma_3^+$  und ein Orbit  $0 \rightarrow 3$  existiert, sofern  $\eta/\mu > \omega^*$  gilt mit einem hinreichend großen  $\omega^*$ .

Sei nun  $\omega^*$  hinreichend groß gewählt.

Der Orbit  $0 \rightarrow 3$ , Teile von  $H$  und  $\partial R$  begrenzen ein Gebiet, das von  $\Gamma_1^u$  geschnitten wird, aber nicht verlassen werden kann (wie man anhand der Richtung des Vektorfeldes bei Randpunkten sehen kann). Deshalb hat  $\Gamma_1^u$  die  $\omega$ -Limesmenge  $\{u_3\}$ .

Der Orbit  $\Gamma_1^u$ , der Teil von  $H^-$  zwischen  $u_2$  und  $u_3$  und  $(\partial R)^+$  begrenzen ein Gebiet

$R' \subset R$ , das negativ invariant ist. Da  $\Gamma_1^s$  und  $\Gamma_2^s$  in  $R'$  hineinzeigen, müssen sie beide die  $\alpha$ -Limesmenge  $\{u_0\}$  haben.

Schließlich gilt  $\Gamma_2^u \subset R \setminus \text{cl}(R')$  und folglich ist der  $\omega$ -Limesmenge von  $\Gamma_2^u$  gleich  $\{u_3\}$ . In der vorliegenden Situation gilt also die Behauptung (i).

**3. SCHRITT:** *Der Fall  $\eta/\mu \ll 1$ .*

Wir betrachten jetzt  $\eta/\mu < \omega_*$ ,  $\omega_* > 0$  hinreichend klein (und möglicherweise verschieden von  $\omega^*$ ). Die Kurven  $\Gamma_1^u$  und  $\Gamma_2^s$  sind dann fast horizontal und demzufolge gibt es keinen heteroklinen Orbit  $i \rightarrow j$  mit  $(i, j) \in \{0, 1\} \times \{2, 3\}$ . Also gilt (iii), wenn  $\omega < \omega_*$  ist.

**4. SCHRITT:** *Existenz und Eindeutigkeit von  $\tilde{\omega}$ .*

Die Situationen, die in den Schritten 2 und 3 beschrieben wurden, sind strukturell stabil (vgl. etwa [GH90]), weil sie keine Sattel-Sattel-Verbindungen enthalten. Außerdem sind sie nicht äquivalent, denn in einem Fall gibt es etwa eine Verbindung  $1 \rightarrow 3$  und im anderen nicht. Daher muss es einen Parameterwert  $\tilde{\omega} \in [\omega_*, \omega^*]$  geben, bei dem eine Sattel-Sattel-Verbindung auftritt, d.h. im vorliegenden Fall ein Orbit  $1 \rightarrow 2$ . Dann ist  $\Gamma = \Gamma_1^u = \Gamma_2^s$  und der Fall (ii) ist bewiesen.

Nach dem Lemma 4.4.3 befindet sich die Schnittmenge von  $\Gamma$  mit einer hinreichend kleinen Umgebung von  $u_1$  bzw.  $u_2$  innerhalb des Gebietes

$$N := \{(v, b) \in R : g(v, b) < 0, h(v, b) < 0\}.$$

Aus der vertikalen bzw. horizontalen Orientierung des Vektorfelds entlang  $H$  bzw.  $G$  und der stückweisen Monotonie von  $g$  folgt, dass  $\Gamma$  vollständig in  $N$  enthalten ist.

Die Orbits  $\Gamma_1^u$  und  $\Gamma_2^s$  schneiden die Gerade  $b = 0$  (zumindest für  $\mu/\eta$  nahe  $\tilde{\omega}$ ) in eindeutigen Punkten  $(v_1^u, 0)$  bzw.  $(v_2^s, 0)$ ; dabei sind  $v_1^u$  und  $v_2^s$  glatte Funktionen von  $\frac{\mu}{\eta}$ .

Die Beziehung  $\Gamma \subset N$  impliziert

$$\frac{\partial}{\partial \omega} \Big|_{\omega=\tilde{\omega}} (v_1^u - v_2^s) > 0,$$

weil sich das Vektorfeld in monotoner Weise mit  $\omega$  ändert; und deshalb findet die Bifurkation in der Nähe von  $\tilde{\omega}$  statt. Insbesondere ist  $\tilde{\omega}$  aufgrund des Vorzeichens von  $(v_1^u - v_2^s)'(\tilde{\omega})$  eindeutig. ■

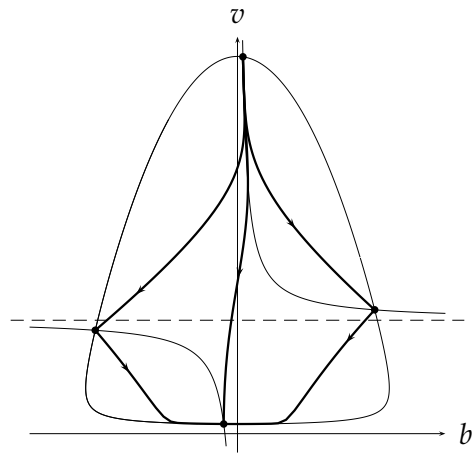


ABBILDUNG 11. Visualisierung der verschiedenen Fälle in Theorem 4.4.4: Fall (i).

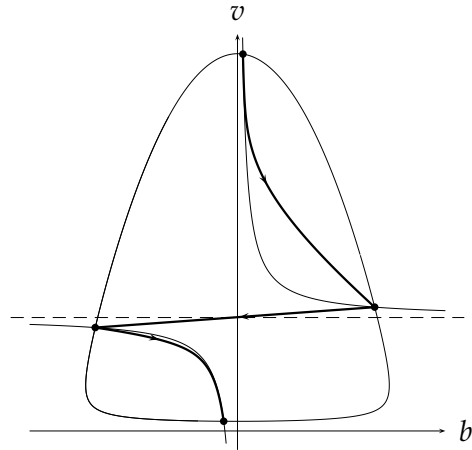


ABBILDUNG 12. Visualisierung der verschiedenen Fälle in Theorem 4.4.4: Fall (ii).

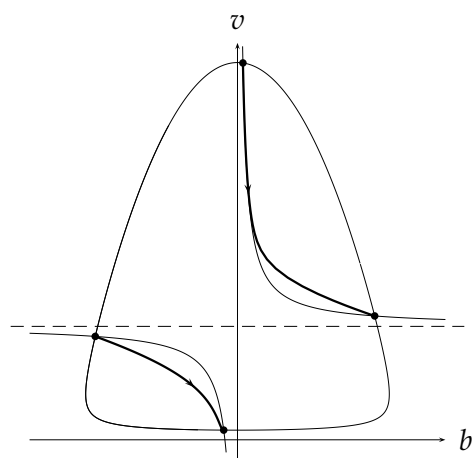


ABBILDUNG 13. Visualisierung der verschiedenen Fälle in Theorem 4.4.4: Fall (iii).

**Folgerung 4.4.5.**

Seien  $\Gamma$  der eindeutig bestimmte Orbit  $u_1 \rightarrow u_2$  aus Theorem 4.4.4 und  $\overline{\Sigma^2}$  das aus  $\Sigma^2$  und der zusätzlichen Gleichung  $\omega' = 0$  (wobei  $\omega = \frac{u}{\eta}$ ) bestehende System.

Bezeichnen  $M_1$  die instabile Mannigfaltigkeit von  $F_1 := \{u_1\} \times (0, \infty)$  und  $M_2$  die stabile Mannigfaltigkeit von  $F_2 := \{u_2\} \times (0, \infty)$ , so gilt:  $M_1$  und  $M_2$  schneiden sich entlang von  $\Gamma \times \{\tilde{\omega}\}$  transversal.

BEWEIS. Der Phasenraum von  $\overline{\Sigma^2}$  ist

$$\{p = (v, b, \omega) : v > 0, \omega > 0\}$$

und die Ruhelagen  $u_1$  und  $u_2$  von  $\Sigma^2$  setzen sich zu den invarianten Mannigfaltigkeiten  $F_1$  bzw.  $F_2$  des erweiterten Systems  $\overline{\Sigma^2}$  fort und bestehen sämtlich aus Fixpunkten bestehen.

Für  $\omega \approx \tilde{\omega}$  lassen sich  $\Gamma_1^u(\omega)$  und  $\Gamma_2^s(\omega)$  wie  $\Gamma$  als Graphen von Funktionen von  $b$  schreiben. Daher können wir  $b$  und  $\omega$  als Koordinaten auf  $M_1$  bzw.  $M_2$  wählen. Ein Punkt  $p \in M_1$  bzw.  $p \in M_2$  hat somit die Gestalt  $p = (v_1^u(b, \omega), b, \omega)$  bzw.  $p = (v_2^s(b, \omega), b, \omega)$ .

Aufgrund der Monotonie des Orbits  $u_1 \rightarrow u_2$  schneiden die Kurven  $\Gamma_1^u(\omega) \times \{\omega\}$  und  $\Gamma_2^s(\omega) \times \{\omega\}$  für  $\omega$  nahe  $\tilde{\omega}$  die Gerade  $\{(\tau, \tilde{b}, \omega) : \tau \in \mathbb{R}\}$  in eindeutig bestimmten Punkten  $(v_+(\omega), \tilde{b}, \omega)$  bzw.  $(v_-(\omega), \tilde{b}, \omega)$  (für jedes  $\tilde{b} \in (b_2, b_1)$ ).

Es gilt (wie im Beweis von 4.4.4) wegen  $\Gamma \subset N$  die Beziehung

$$\left. \frac{\partial}{\partial \omega} \right|_{\omega=\tilde{\omega}} (v_- - v_+)(\omega) > 0. \quad (4.5)$$

Bei einem Schnittpunkt  $\tilde{p} = (\tilde{v}, \tilde{b}, \tilde{\omega})$  von  $M_1$  und  $M_2$  betrachten wir die Tangentialvektoren von  $M_1$  und  $M_2$ . Es seien

$$T_{1,2}^a := \frac{\partial p}{\partial \omega} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_{1,2}^{u,s}}{\partial \omega}(\tilde{\omega}, \tilde{b}) \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad T_{1,2}^b := \frac{\partial p}{\partial b} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_{1,2}^{u,s}}{\partial b}(\tilde{\omega}, \tilde{b}) \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Es gilt: Die (aufgrund der zweiten und dritten Komponenten) linear unabhängigen Vektoren  $\{T_1^a, T_1^b\}$  bzw.  $\{T_2^a, T_2^b\}$  spannen den Tangentialraum  $T_p M_1$  bzw.  $T_p M_2$  auf. Es genügt zu zeigen, dass die drei Vektoren  $T_1^a, T_2^a$  und  $T_1^b$  linear unabhängig sind. Dazu sei

$$\lambda_1 T_1^a + \lambda_2 T_2^a + \lambda_3 T_1^b = 0,$$

woraus aufgrund der zweiten Komponente sofort  $\lambda_3 = 0$  folgt. Die dritte Komponente dieser Gleichung lautet  $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ , womit die erste Komponente die Gestalt

$$\lambda_1 \cdot \left. \frac{\partial}{\partial \omega} \right|_{\omega=\tilde{\omega}} (v_1^u - v_2^s) = 0$$

annimmt. Aus der Ungleichung (4.5) folgt somit  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ , also bilden die Vektoren  $T_1^a, T_2^a, T_1^b$  eine Basis des  $\mathbb{R}^3$ . ■

## Monotonie des Orbits $u_1 \rightarrow u_2$

Bei dem folgenden Resultat handelt es sich um eine einfache Folgerung aus dem Theorem 4.4.4.

### Satz 4.4.6.

Entlang eines Orbits  $u_1 \rightarrow u_2$  sind die Komponenten  $v$  und  $b$  monoton fallende Funktionen.

**BEWEIS.** Im 4. Schritt des Beweises von Theorem 4.4.4 wurde gezeigt, dass der Orbit  $u_1 \rightarrow u_2$  ganz innerhalb eines (dort mit  $N$  bezeichneten) Gebietes verläuft, in dem die Ungleichungen

$$v' < 0 \quad \text{und} \quad b' < 0$$

gelten, welche die Behauptung unmittelbar nach sich ziehen. ■

## Subshocks und langsame Orbits

Als *Subshock* bezeichnet man einen *unstetigen* heteroklinen Orbit, der sich aus einer parameterabhängigen Familie heterokliner Orbits in dem Grenzfall gegen Null strebender Parameter ergibt. Dieses Phänomen ist schon lange bekannt und wurde bereits in [Gil51] für den Fall der Gasdynamik diskutiert.

Der folgende Satz beschreibt das Auftreten von Subshocks in dem Regime  $v = 0$  in Abhängigkeit vom Wert des Ausdrucks  $m + p'(v)$  bei  $v \in \{v_1, v_2\}$ . Dessen Vorzeichen entscheidet, ob zwischen zwei Ruhelagen im Grenzfall ein *langsamer* Orbit auf einer der Nullclines oder ein Subshock existiert.

### Satz 4.4.7.

Für  $v = 0$  und  $\frac{\mu}{\eta} \rightarrow 0$  gilt:

Es existiert eine Schar von Subshocks des Typs  $0 \rightarrow 3$ .

Falls  $m + p'(v_1) < 0$  [ $> 0$ ] gilt, so gibt es den Subshock [Orbit]  $0 \rightarrow 1$  und den Orbit [Subshock]  $1 \rightarrow 3$ .

Falls  $m + p'(v_2) > 0$  [ $< 0$ ] gilt, so gibt es den Subshock [Orbit]  $2 \rightarrow 3$  und den Orbit [Subshock]  $0 \rightarrow 2$ .

Für  $v = 0$  und  $\frac{\eta}{\mu} \rightarrow 0$  existieren die Orbits  $0 \rightarrow 1$  und  $2 \rightarrow 3$  und es treten keine Subshocks auf.

**BEWEIS.** Ist  $v = 0$ , so genügt es, sich die Dynamik des Systems in der  $(b, v)$ -Ebene anzusehen. Alle beschränkten Orbits befinden sich innerhalb des von  $v' = 0$  umschlossenen Gebiets  $G$  und  $\mu = 0$  restringiert die Dynamik auf den Rand von  $G$ , dessen Gestalt in Lemma 4.4.1 beschrieben wird.

Im Grenzfall  $\frac{\eta}{\mu} = 0$  erhalten wir:



$$b' = (v - d)b - c$$

$$b' = 0$$

$$0 = mv + p(v) + \frac{1}{2}b^2 - j$$

$$v' = mv + p(v) + \frac{1}{2}b^2 - j$$

Nach Lemma 4.4.1 besteht die durch  $g(v, b) = 0$  definierte Kurve aus zwei Teilen, nämlich

$$S_1 := \partial G \cap \{m + p'(v) > 0\} \quad \text{und} \quad S_2 := \partial G \cap \{m + p'(v) < 0\},$$

die sich als Graph einer Funktion von  $b$  schreiben lassen. Aus dem Abschnitt 3.2 ist  $m + p'(v_0) > 0$  und  $m + p'(v_3) < 0$  bekannt, also gilt  $u_0 \in S_1$  und  $u_3 \in S_2$ . Nach dem Lemma 4.4.3 sind  $u_0$  und  $u_3$  Knoten des Systems  $\Sigma^2$  und diese Eigenschaft bleibt beim Übergang zum reduzierten Problem erhalten. Aus dieser Tatsache folgt sofort die Existenz eines heteroklinen Orbits  $u_0 \rightarrow u_i$ , falls  $u_i \in S_1$  für ein  $i \in \{1, 2\}$ , d.h. falls  $m + p'(v_i) > 0$  gilt. Ebenso folgt die Existenz eines heteroklinen Orbits  $u_i \rightarrow u_3$  für ein  $i \in \{1, 2\}$ , falls  $m + p'(v_i) < 0$  gilt.

Sei nun  $u_1 = (b_1, v_1) \in S_2$ . Wähle  $\tilde{v}$  so, dass  $\tilde{u} = (b_1, \tilde{v}) \in S_1$ . Es gibt dann einen Orbit  $\gamma_1$  (welcher Teil der instabilen Mannigfaltigkeit von  $u_0$  ist) in  $S_1$ , der die Punkte  $u_0$  und  $\tilde{u}$  verbindet. Außerdem sind  $\tilde{u}$  und  $u_1$  Ruhelagen des Schichtproblems, dessen Fluss einen heteroklinen Orbit  $\gamma_s : \tilde{u} \rightarrow u_1$  gestattet. Mit den Bezeichnungen von Abschnitt 2.4 bildet die Vereinigung  $\gamma := \gamma_1 \cup \gamma_s$  dann einen (unstetigen) singulären Orbit  $u_0 \rightarrow u_1$ ; genauer aufgeschrieben könnte  $\gamma$  beispielsweise diese Gestalt haben:

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{für } t \leq 0 \\ u_1 & \text{für } t > 0, \end{cases}$$

wenn  $\gamma_1(0) = \tilde{u}$  ist. Somit ist der Schock  $u_0 \rightarrow u_1$  ein Subschock. Ebenso folgt die Behauptung für die übrigen Subschocks  $u_0 \rightarrow u_i$  und  $u_i \rightarrow u_3$  mit einem  $i \in \{1, 2\}$ .

Für den Schock  $u_0 \rightarrow u_3$  betrachte ein  $\tilde{b} \in (b_2, b_1)$  und wähle die Werte  $\tilde{v}_1 > d > \tilde{v}_2$  so, dass  $\tilde{u}_1 := (\tilde{b}, \tilde{v}_1) \in S_1$  und  $\tilde{u}_2 := (\tilde{b}, \tilde{v}_2) \in S_2$  gilt. Dann gibt es einen Orbit  $\gamma_1 : u_0 \rightarrow \tilde{u}_1$  (welcher Teil der instabilen Mannigfaltigkeit von  $u_0$  ist) in  $S_1$  und  $\gamma_2 : \tilde{u}_2 \rightarrow u_3$  (welcher Teil der stabilen Mannigfaltigkeit von  $u_3$  ist) in  $S_2$ . Ferner existiert ein Orbit  $\gamma_s : \tilde{u}_1 \rightarrow \tilde{u}_2$  des Schichtproblems, sodass die Vereinigung  $\gamma := \gamma_1 \cup \gamma_s \cup \gamma_2$  wiederum einen singulären Orbit bildet, der etwa die Gestalt

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{für } t \leq 0 \\ \gamma_2(t) & \text{für } t > 0 \end{cases}$$

haben könnte, falls  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  derart parametrisiert sind, dass  $\gamma_1(0) = \tilde{u}_1$  und  $\gamma_2(0) = \tilde{u}_2$  gilt. Diese Argumentation funktioniert für jede beliebige Zahl  $\tilde{b} \in (b_2, b_1)$ , sodass wir eine (durch  $\tilde{b}$  parametrisierte) Schar von Subschocks erhalten.

Im Grenzfall  $\frac{\eta}{\mu} = 0$  erhalten wir:

*Reduziertes Problem*

$$\begin{aligned} v' &= mv + p(v) + \frac{1}{2}b^2 - j \\ 0 &= (v - d)b - c \end{aligned}$$

*Schichtproblem*

$$\begin{aligned} v' &= 0 \\ b' &= (v - d)b - c \end{aligned}$$

Das Schichtproblem besitzt nur eine Ruhelage, daher existieren keine heteroklinen Orbit, und mithin gibt es keine Subschocks. Jedoch besitzt das reduzierte Problem heterokline Orbits auf jedem der beiden Hyperbeläste

$$S_1 := \{(b, v) : (v - d)b - c = 0\} \cap \{v > d\}$$

und

$$S_2 := \{(b, v) : (v - d)b - c = 0\} \cap \{v < d\},$$

denn erstens gilt  $u_0, u_1 \in S_1$  und  $u_2, u_3 \in S_2$  und zweitens bildet der  $u_0$  und  $u_1$  verbindende Teil von  $S_1$  einen heteroklinen Orbit  $u_0 \rightarrow u_1$  bzw. der  $u_2$  und  $u_3$  verbindende Teil von  $S_2$  einen heteroklinen Orbit  $u_2 \rightarrow u_3$  ■

**Bemerkung 4.4.8.**

- (i) Bei den Subschocks handelt sich offensichtlich um unstetige Lösungen. Weniger klar ist zunächst, ob man sie als Grenzwert (wie oben beschrieben) gewinnen kann. Diese Frage wird durch den Satz 2.4.10 beantwortet, vorausgesetzt die Familie besteht aus transversalen regulären heteroklinen Orbits.
- (ii) Entlang der Subschocks und entlang der heteroklinen Orbits schneiden sich die beteiligte stabile und instabile Mannigfaltigkeit transversal. Mit den Bezeichnungen aus Abschnitt 2.4 sind  $\mathcal{N}_1$  und  $\mathcal{N}_2$  offene Teilmengen des  $\mathbb{R}^2$  und der Schnitt entlang des Orbits ist folglich transversal. ◇

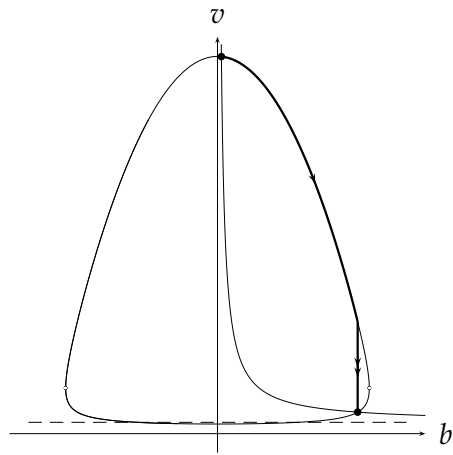


ABBILDUNG 14. Veranschaulichung eines Subshocks vom Typ  $0 \rightarrow 1$ .

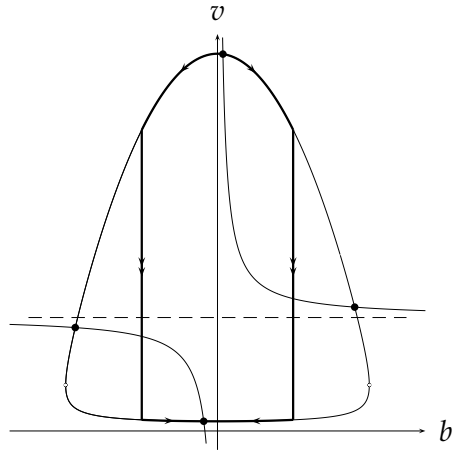


ABBILDUNG 15. Veranschaulichung von Subshocks vom Typ  $0 \rightarrow 3$ .

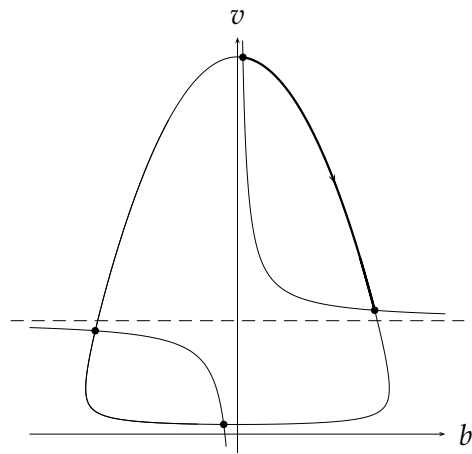


ABBILDUNG 16. Veranschaulichung eines langsamen Orbits für  $\frac{\mu}{\eta} \ll 1$ .

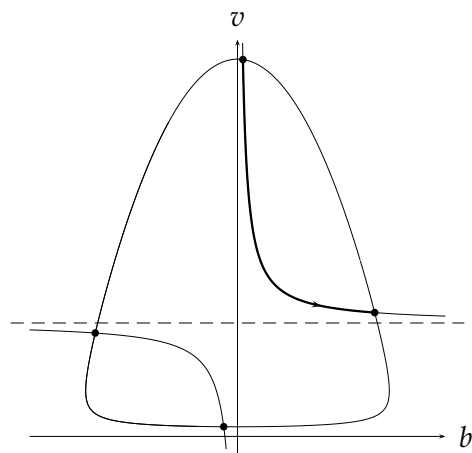


ABBILDUNG 17. Veranschaulichung eines langsamen Orbits für  $\frac{\mu}{\eta} \gg 1$ .

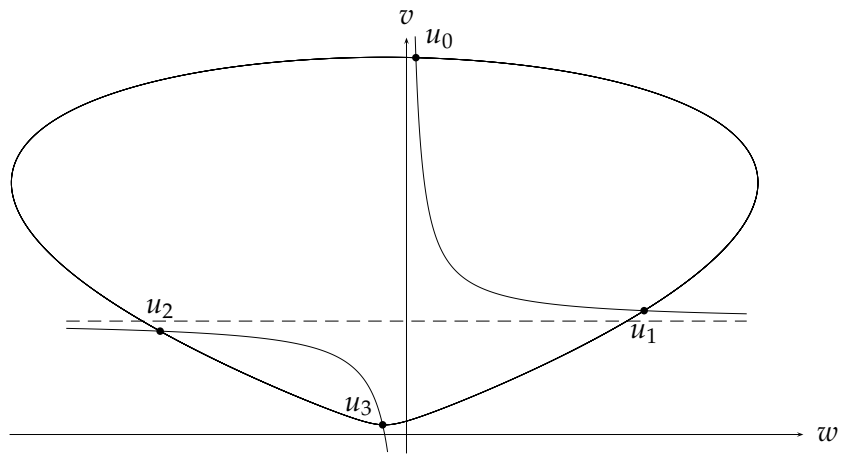


ABBILDUNG 18.  $\eta = 0$ : Projektion der Nullclines und der Ruhelagen in die  $w$ - $v$ -Ebene.

#### 4.4.2 Der Spezialfall $\eta = 0$

Ein ähnliches Resultat wie es in Abschnitt 4.4.1 für den Fall  $v = 0$  angegeben wurde, erhält man für den Fall  $\eta = 0$ . Das Hauptergebnis ist im folgenden Satz zusammengefasst.

**Satz 4.4.9.**

Seien  $\mu > 0$  und  $v > 0$ . Dann gibt es ein  $\omega > 0$ , mit welchem gilt:

- (i) Ist  $\mu/v < \omega$ , so existieren die Orbits  $0 \rightarrow 1, 0 \rightarrow 2, 0 \rightarrow 3, 1 \rightarrow 3, 2 \rightarrow 3$ .
- (ii) Ist  $\mu/v = \omega$ , so existieren die Orbits  $0 \rightarrow 1, 1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 3$ .
- (iii) Ist  $\mu/v > \omega$ , so existieren die Orbits  $0 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 3$ .

BEWEIS. Die qualitative Struktur des dynamischen Systems ist genau so beschaffen wie im bereits behandelten Fall  $v = 0$  und wir verweisen daher auf den dort gegebenen Beweis (siehe Satz 4.4.4).

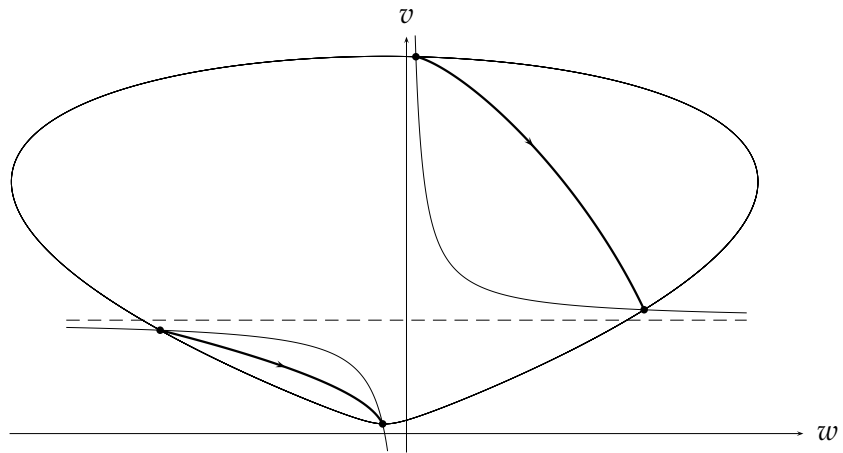


ABBILDUNG 19.  $\eta = 0$ : Veranschaulichung heterokliner Orbits in der  $w$ - $v$ -Ebene für  $\frac{\mu}{\nu} \approx 1000$ .

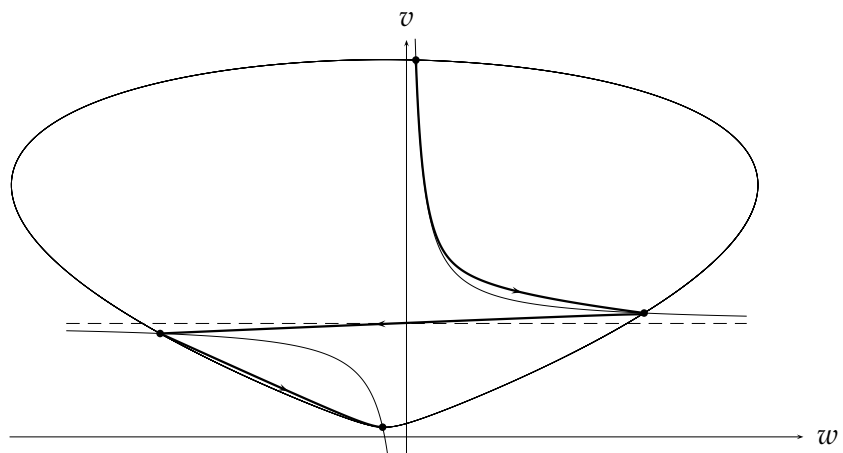


ABBILDUNG 20.  $\eta = 0$ : Veranschaulichung heterokliner Orbits in der  $w$ - $v$ -Ebene für  $\frac{\mu}{\nu} \approx 290$ .

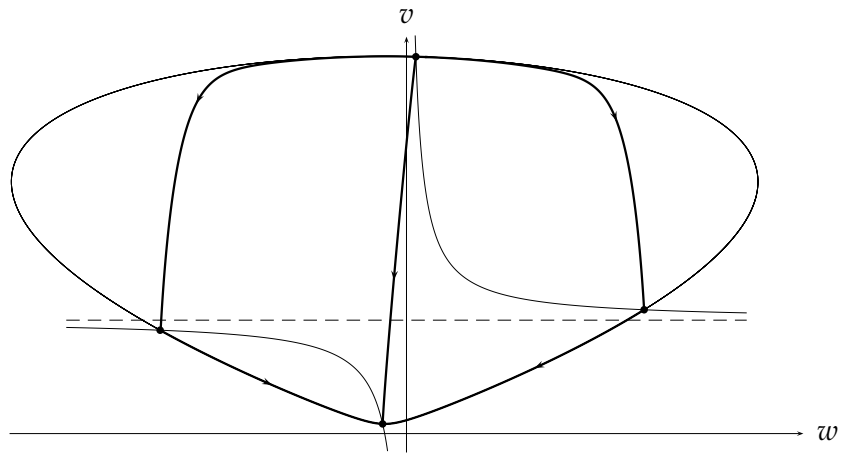


ABBILDUNG 21.  $\eta = 0$ : Veranschaulichung heterokliner Orbits in der  $w$ - $v$ -Ebene für  $\frac{\mu}{\nu} \approx 0.001$ .

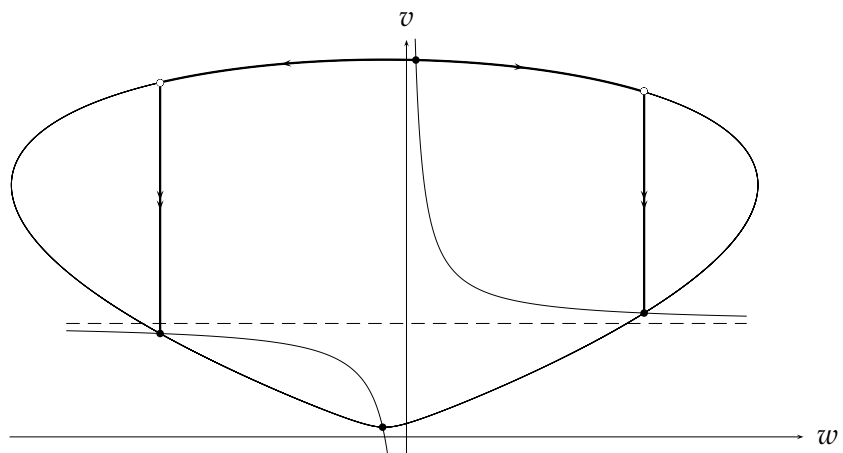


ABBILDUNG 22.  $\eta = 0$ : Darstellung von Subshocks vom Typ  $0 \rightarrow 1$  und  $0 \rightarrow 2$  (als Projektion in die  $w$ - $v$ -Ebene).

#### 4.4.3 Die Spezialfälle $\nu \rightarrow \infty$ , $\eta \rightarrow \infty$ und $\mu \rightarrow \infty$

Der Fall  $\nu \rightarrow \infty$

Für diesen Grenzfall erhält man ein reduziertes und ein Schichtproblem.

*Reduziertes Problem*

*Schichtproblem*

$$w' = mw - ab$$

$$w' = 0$$

$$0 = vb - aw - c$$

$$\mu v' = mv + p(v) + \frac{1}{2}b^2 - j$$

$$0 = mv + p(v) + \frac{1}{2}b^2 - j$$

$$\eta b' = vb - aw - c$$

#### Satz 4.4.10.

Es sei  $j$  hinreichend groß, d.h. alle vier Ruhelagen von  $(\Sigma^3)$  mögen existieren.

- (i) Das reduzierte Problem umfasst alle vier Ruhelagen und es gibt ausschließlich die folgenden heteroklinen Orbits:  $0 \rightarrow 2$  und  $1 \rightarrow 3$ .
- (ii) Es existieren Zahlen  $w_* < 0 < w^*$ , sodass das Schichtproblem für jedes  $w \in (w_*, w^*)$  genau zwei Ruhelagen und einen sie verbindenden Orbit besitzt.
- (iii) Es existieren die (im Sinne von 2.4) singulären Orbits

$$0 \rightarrow 1, 0 \rightarrow 2, 0 \rightarrow 3, 1 \rightarrow 3 \text{ und } 2 \rightarrow 3.$$

**BEWEIS.** (i) Die Aussage über die Ruhelagen folgt aus dem Lemma über die Ruhelagen von  $(\Sigma^3)$ , denn die Ruhelagen des reduzierten Problems erfüllen dasselbe Gleichungssystem wie die Ruhelagen von  $(\Sigma^3)$ .

- (ii) Es ist  $w' = 0$ , also  $w = \text{const}$ . Eine Ruhelage  $\mathbf{u} = (v, w, b)$  muss offenbar den Gleichungen

$$0 = vb - (w + c) \quad \text{und} \quad 0 = mv + p(v) + \frac{1}{2}b^2 - j$$

genügen. Durch Auflösen der ersten Gleichung nach  $b$  und Einsetzen in die zweite ist die Existenz einer Ruhelage äquivalent zur Existenz einer Nullstelle der Funktion

$$F(v) := mv + p(v) + \frac{1}{2} \frac{(w + c)^2}{v^2} - j$$

Falls  $j$  genügend groß ist (das haben wir angenommen), existieren dann wie in Abschnitt 3.2 genau zwei Nullstellen  $v_- < v_+ \in \mathbb{R}_{>0}$ , vorausgesetzt  $|w|$  ist klein genug. Ferner gilt die Relation  $F'(v_-) < 0 < F'(v_+)$ .

Also besitzt das reduzierte Problem genau zwei Ruhelagen  $\mathbf{u}_-$  und  $\mathbf{u}_+$ , wenn  $|w|$  klein genug ist. Anders formuliert, gibt es  $w_* < w^*$ , sodass für  $w \in (w_*, w^*)$



genau zwei Ruhelagen  $\mathbf{u}_\pm(w)$  existieren und für  $w \in \{w_*, w^*\}$  genau eine. Die Kurven  $\mathbf{u}_\pm : [w_*, w^*] \rightarrow \mathcal{U}$  sind glatt und ihre Vereinigung bildet eine glatte geschlossene Kurve.

Die Differenzierbarkeit folgt aus der Differenzierbarkeit der genannten impliziten Gleichungen, deren Jacobi-Matrix

$$\frac{\partial}{\partial(b, v)} \begin{pmatrix} vb - (aw + c) \\ mv + p(v) + \frac{1}{2}b^2 - j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v & b \\ b & m + p'(v) \end{pmatrix}$$

wegen

$$F'(v) = m + p'(v) - \frac{(w + c)^2}{v^3} = m + p'(v) - \frac{b^2}{v} = \frac{1}{v} (v(m + p'(v)) - b^2)$$

bei den Ruhelagen  $\mathbf{u}_\pm$  vollen Rang besitzt.

Eine Analyse des (in die  $v$ - $b$ -Ebene projizierten) Phasenportraits liefert die Existenz eines eindeutigen heteroklinen Orbits  $\mathbf{u}_-(w) \rightarrow \mathbf{u}_+(w)$  (mit einer ähnlichen Überlegung wie in Abschnitt 4.2 im Spezialfall  $a = 0$ ).

- (iii) Folgt mit (i) und (ii) aus der Analyse des Phasenportraits. Genauer ist daraus ersichtlich, dass das reduzierte Problem die heteroklinen Orbits  $1 \rightarrow 3$  und  $2 \rightarrow 3$  besitzt und dass man singuläre Orbits  $0 \rightarrow i, i \in \{1, 2, 3\}$ , finden kann, indem man Teile von Orbits des reduzierten Problems und des Schichtproblems zusammensetzt. Dabei sind die Verbindungen für  $i \in \{1, 2\}$  eindeutig und für  $i = 3$  existiert eine ganze Schar von Verbindungen, nämlich genau eine für jedes  $w \in (w_2, w_1)$ . ■

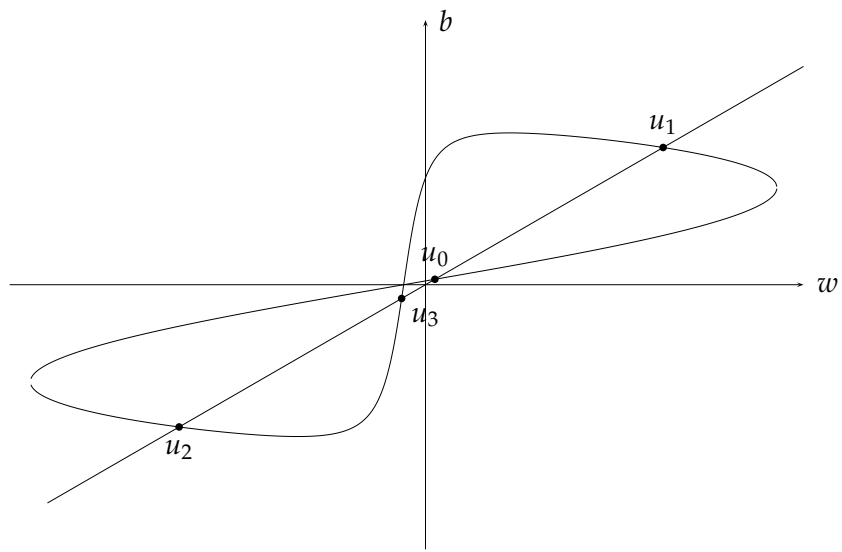


ABBILDUNG 23.  $\nu \rightarrow \infty$ : Projektion des Zustandsraums des reduzierten Problems in die  $w$ - $b$ -Ebene mit Ruhelagen.

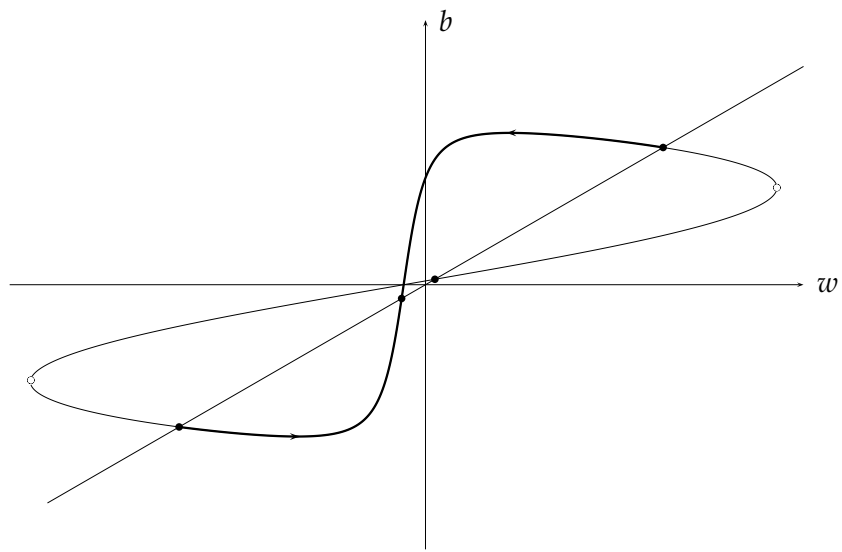


ABBILDUNG 24.  $\nu \rightarrow \infty$ : Visualisierung von langsamen Orbits vom Typ  $1 \rightarrow 3$  und  $2 \rightarrow 3$ .

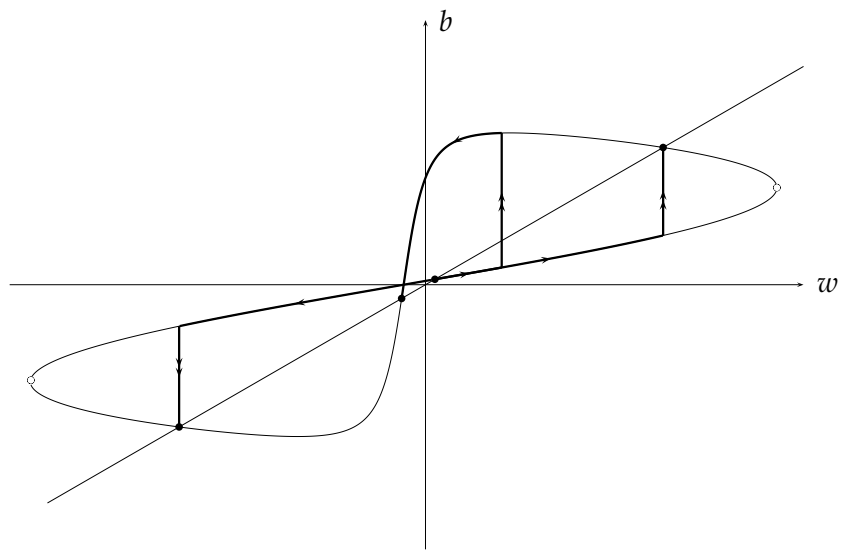


ABBILDUNG 25.  $\nu \rightarrow \infty$ : Visualisierung von singulären Orbits vom Typ  $0 \rightarrow 1$ ,  $0 \rightarrow 2$  und  $0 \rightarrow 3$ .

Der Fall  $\eta \rightarrow \infty$

Reduziertes Problem

Schichtproblem

$$b' = vb - aw - c$$

$$b' = 0$$

$$0 = mv + p(v) + \frac{1}{2}b^2 - j$$

$$\mu v' = mv + p(v) + \frac{1}{2}b^2 - j$$

$$0 = m\tau w - ab$$

$$v\tau w' = m\tau w - ab$$

**Satz 4.4.11.**

Unter der Voraussetzung, dass  $j \in \mathbb{R}$  genügend groß ist, gelten folgende Aussagen über die Existenz regulärer und singulärer Orbits.

- (i) Beim reduzierten Problem existiert der Orbit  $0 \rightarrow 1$  bzw.  $1 \rightarrow 3$  genau dann, wenn  $m + p'(v_1) > 0$  bzw.  $m + p'(v_1) < 0$  gilt, und es existiert der Orbit  $0 \rightarrow 2$  bzw.  $2 \rightarrow 3$  genau dann, wenn  $m + p'(v_2) > 0$  bzw.  $m + p'(v_2) < 0$ .
- (ii) Beim Schichtproblem existieren genau zwei Ruhelagen und zwischen diesen genau ein heterokliner Orbit.
- (iii) Die Verbindungen  $0 \rightarrow 1$  bzw.  $1 \rightarrow 3$  existieren genau dann als singuläre Orbits, wenn  $m + p'(v_1) < 0$  bzw.  $m + p'(v_1) > 0$  gilt und die Verbindungen  $0 \rightarrow 2$  bzw.  $2 \rightarrow 3$  existieren genau dann als singuläre Orbits, wenn  $m + p'(v_2) < 0$  bzw.  $m + p'(v_2) > 0$  gilt.

Außerdem existiert eine Schar von singulären Orbits der Art  $0 \rightarrow 3$ .

BEWEIS.

- (i) und (iii) Die Gleichungen des reduzierten Problems sind identisch mit denen aus dem Fall  $\mu = \nu = 0$ . Daher folgen die Behauptungen (i) und (iii) aus dem Satz 4.4.7.
- (ii) Das Schichtproblem besteht aus zwei entkoppelten Gleichungen. Die Geraden  $w = a/mb$  sind invariant und enthalten einen heteroklinen Orbit zwischen den beiden Ruhelagen  $(v_-, b)$  und  $(v_+, b)$ , falls diese existieren. Die Existenz der Ruhelagen ist für hinreichend großes  $j \in \mathbb{R}$  gesichert. ■

Der Fall  $\mu \rightarrow \infty$

Reduziertes Problem

Schichtproblem

$$v' = mv + p(v) + \frac{1}{2}b^2 - j$$

$$v' = 0$$

$$0 = m\tau w - ab$$

$$v\tau w' = m\tau w - ab$$

$$0 = vb - aw - c$$

$$\eta b' = vb - a\tau w - c$$

**Satz 4.4.12.**

- (i) Für das reduzierte Problem existieren (nur) die Orbits  $0 \rightarrow 1$  und  $2 \rightarrow 3$ .
- (ii) Für das Schichtproblem existieren im Fall  $c > 0$  keine heteroklinen Orbits.

**BEWEIS.** (i) Das reduzierte Problem ist auf die Hyperbel  $(v - d)b = c$  in der Ebene  $mw - ab = 0$  restringiert. Auf der Hyperbel befinden sich die vier hyperbolischen Ruhelagen zwischen denen die behaupteten Orbits existieren.

- (ii) Das Schichtproblem besitzt zu gegebenem  $v = v_0 > 0$  nur eine Ruhelage  $(v_0, w_0, b_0)$ , nämlich

$$b_0 = \frac{c}{v - d}, \quad w_0 = \frac{a}{m} \frac{c}{v - d};$$

deshalb gibt es keinen heteroklinen Orbit. ■

Aus dem Teil (ii) folgt unmittelbar, dass es auch keine singulären heteroklinen Orbits im Sinne von Abschnitt 2.4 gibt.

## 4.5 Untersuchungen mithilfe singulärer Störungstheorie

Wir werden in diesem Abschnitt zeigen, inwiefern sich die Existenz heterokliner Orbits unter singulärer Viskosität auf Fälle mit regulärer Viskosität übertragen lässt. Zu diesem Zweck weisen wir die nötigen Voraussetzungen der benötigten Theoreme aus Abschnitt 2.4 nach und zitieren die bereits in singulären Spezialfällen erhaltenen Ergebnisse aus früheren Abschnitten.

**Der Fall  $0 < v \ll \min\{\mu, \eta\}$**

### Langsame Orbits

#### **Theorem 4.5.1.**

Es gibt eine Zahl  $\varepsilon > 0$ , sodass für jede Wahl  $(\mu, v, \eta) \in \Delta$  mit

$$0 < \frac{v}{\mu} + \frac{v}{\eta} < \varepsilon$$

eine Zahl  $\omega > 0$  existiert, mit welcher gilt:

- (i) Falls  $\mu/\eta < \omega$  ist, so existieren nur heterokline Orbits  $0 \rightarrow 1, 0 \rightarrow 2, 0 \rightarrow 3, 1 \rightarrow 3$  und  $2 \rightarrow 3$ .
- (ii) Falls  $\mu/\eta = \omega$  ist, so existieren nur heterokline Orbits  $0 \rightarrow 1, 1 \rightarrow 2$  und  $2 \rightarrow 3$ .
- (iii) Falls  $\mu/\eta > \omega$  ist, so existieren nur heterokline Orbits  $0 \rightarrow 1$  und  $2 \rightarrow 3$ .

**BEWEIS. 1. SCHRITT:** Nachweis der Annahmen (A1) und (A2).

Seien

$$\tilde{S} := \{(v, w, b) \in \mathcal{U} : mw - ab = 0\}$$

und  $K$  ein hinreichend großer kompakter Quader. Gemäß Satz C.1.2 können wir annehmen, dass  $K$  alle Punkte enthält, die auf vollständigen beschränkten Orbits liegen. Mit einem derartigen  $K$  setzen wir

$$S := \tilde{S} \cap K$$

zeigen, dass die Menge  $S$  die Annahmen (A1) und (A2) erfüllt.

Die implizite Gleichung in der Definition von  $\tilde{S}$  ist linear, mithin glatt, und lässt sich offensichtlich global auflösen:  $w = \frac{a}{m}b$ . Damit ist  $S$  eine glatte kompakte Mannigfaltigkeit, d.h. (A1) ist erfüllt.

Für die Voraussetzung (A2) betrachten wir die Linearisierung der  $\tilde{S}$  definierenden impliziten Funktion bezüglich der Variablen  $w$ :

$$\frac{\partial(mw - ab)}{\partial w} = m > 0.$$

Es gibt also trivialerweise genau einen positiven Eigenwert bei jedem Punkt in  $S$ . Somit ist auch (A2) erfüllt.

## 2. SCHRITT: Anwendung der singulären Störungstheorie.

Wir schreiben  $(\Sigma^3)$  in der Form

$$\begin{pmatrix} v \\ b \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \frac{1}{\mu} (mv + p(v) + \frac{1}{2}b^2 - j) \\ \frac{1}{\eta} (vb - aw - c) \end{pmatrix}$$

$$vw' = mw - ab$$

um die Ähnlichkeit zu dem in 2.4 betrachteten System unmittelbar ersichtlich darzustellen.

Nach dem 1. Schritt sind die in 2.4 formulierten Annahmen (A1) und (A2) erfüllt, also folgt die Behauptung kraft des Theorems 2.4.2 aus den in 4.4.1 gewonnenen Ergebnissen im Spezialfall  $\nu = 0$ . ■

## Asymptotik von $S^\varepsilon$

Wie der Beweis des Theorems 4.5.1 gezeigt hat, lässt sich die invariante Mannigfaltigkeit  $S$  global als Graph einer glatten Funktion schreiben. Daher befinden wir uns in der Situation, für die das Theorem 2.4.4 zutrifft und die gestörte Mannigfaltigkeit  $S^\varepsilon$  als Graph einer gestörten Funktion beschreibt.

### Satz 4.5.2.

Die Mannigfaltigkeit  $S^\varepsilon$  ist Graph einer Funktion  $h^\varepsilon$ , deren asymptotische Entwicklung

$$h^\varepsilon(v, b) = h_0(v, b) + \varepsilon h_1(v, b) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

mit den Koeffizienten

$$h_0(v, b) = \frac{a}{m} b$$

$$h_1(v, b) = \frac{a}{m^2 \eta} ((v - d)b - c)$$

beginnt.

BEWEIS. Aus dem Spezialfall  $v = 0$  ist

$$h_0(v, b) = \frac{a}{m} b$$

bekannt. Ausgehend vom *schnellen System*

$$v' = \varepsilon f_1$$

$$b' = \varepsilon f_2 = \varepsilon (vb - aw - c)$$

$$w' = mw - ab$$

mit

$$f_1 := \frac{1}{\mu} \left( mv + p(v) + \frac{1}{2} b^2 - j \right) \quad \text{und} \quad f_2 := \frac{1}{\eta} (vb - aw - c),$$

erhält man durch Ableiten des Ansatzes

$$w = h^\varepsilon(v, b) = h_0(v, b) + \varepsilon h_1(v, b) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad (4.6)$$

die Gleichung

$$w' = \frac{a}{m} b' + \varepsilon \left( \frac{\partial h_1}{\partial v} v' + \frac{\partial h_1}{\partial b} b' \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \quad (4.7)$$

Einsetzen der Relationen aus der Differentialgleichung führt unter Zusammenfassen und Vernachlässigen der Terme höherer Ordnung auf

$$\begin{aligned} m\varepsilon h_1(v, b) &= \frac{a}{m} \varepsilon f_2 + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ &= \frac{a\varepsilon}{m\eta} \left( vb - a \left( \frac{a}{m} b + \varepsilon h_1(v, b) \right) - c \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ &= \frac{a\varepsilon}{m\eta} ((v - d)b - c) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \end{aligned}$$

mithin

$$h_1(v, b) = \frac{a}{m^2 \eta} ((v - d)b - c). \quad \blacksquare$$



## Monotonie des Orbits $1 \rightarrow 2$

### Satz 4.5.3.

Entlang eines Orbits  $1 \rightarrow 2$  sind die Komponenten  $v, w, b$  monoton fallend Funktionen.

BEWEIS. Aus der Untersuchung des Spezialfalls  $v = 0$  in Abschnitt 4.4.1 ist die Monotonie der Komponenten  $v$  und  $b$  nach 4.4.6 bekannt. Für die verbleibende Komponente  $w$  betrachten wir die asymptotische Entwicklung

$$w = \frac{a}{m} b + \varepsilon \frac{1}{m\eta} ((v-d)b - c) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

der lokal invarianten Mannigfaltigkeit  $S^\varepsilon$ . Entlang des Orbits ist  $b' < 0$ , d.h. der in  $\varepsilon$  lineare Summand ist negativ, also gilt

$$w < \frac{a}{m} b$$

für genügend kleines  $\varepsilon$  und damit  $w' < 0$ . ■

**Der Fall**  $0 < \eta \ll \min\{\mu, \nu\}$

### Theorem 4.5.4.

Es gibt eine Zahl  $\varepsilon > 0$ , sodass für jede Wahl  $(\mu, \nu, \eta) \in \Delta$  mit

$$0 < \frac{\eta}{\mu} + \frac{\eta}{\nu} < \varepsilon$$

eine Zahl  $\omega > 0$  existiert, mit welcher gilt:

- (i) Falls  $\mu/\nu < \omega$  ist, so existieren nur heterokline Orbits  $0 \rightarrow 1, 0 \rightarrow 2, 0 \rightarrow 3, 1 \rightarrow 3$  und  $2 \rightarrow 3$ .
- (ii) Falls  $\mu/\nu = \omega$  ist, so existieren nur heterokline Orbits  $0 \rightarrow 1, 1 \rightarrow 2$  und  $2 \rightarrow 3$ .
- (iii) Falls  $\mu/\nu > \omega$  ist, so existieren nur heterokline Orbits  $0 \rightarrow 1$  und  $2 \rightarrow 3$ .

BEWEIS. **1. SCHRITT:** Nachweis der Annahmen (A1) und (A2).

Seien

$$\tilde{S} := \{(v, w, b) \in \mathcal{U} : vb - aw - c = 0\}$$

und  $K$  ein hinreichend großer kompakter Quader. Gemäß Satz C.1.2 können wir annehmen, dass  $K$  alle Punkte enthält, die auf vollständigen beschränkten Orbits liegen. Mit einem derartigen  $K$  setzen wir

$$S := \tilde{S} \cap K$$

zeigen, dass die Menge  $S$  die Annahmen (A1) und (A2) erfüllt.

Die implizite Gleichung in der Definition von  $\tilde{S}$  lässt sich global auflösen

$$b = \frac{aw + c}{v}$$

und die Funktion auf der rechten Seite der Gleichung ist im gesamten betrachteten Zustandsraum  $\mathcal{U}$  glatt (denn dort ist  $v > 0$ ). Somit ist  $S$  eine glatte kompakte Mannigfaltigkeit, d.h. (A1) ist erfüllt.

Für die Voraussetzung (A2) betrachten wir die Linearisierung der  $\tilde{S}$  definierenden impliziten Funktion bezüglich der Variablen  $b$ :

$$\frac{\partial(vb - aw - c)}{\partial b} = v > 0.$$

Es gibt also genau einen positiven Eigenwert bei jedem Punkt von  $S$ . Somit ist auch (A2) erfüllt.

## 2. SCHRITT: Anwendung der singulären Störungstheorie.

Wir schreiben  $(\Sigma^3)$  in der Form

$$\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \frac{1}{\mu} (mv + p(v) + \frac{1}{2}b^2 - j) \\ \frac{1}{v} (mw - ab) \end{pmatrix}$$

$$\eta b' = vb - aw - c$$

um die Ähnlichkeit zu dem in 2.4 betrachteten System unmittelbar ersichtlich darzustellen.

Nach dem 1. Schritt sind die in 2.4 formulierten Annahmen (A1) und (A2) erfüllt, also folgt die Behauptung kraft des Theorems 2.4.2 aus den in 4.4.2 gewonnenen Ergebnissen im Spezialfall  $\eta = 0$ . ■

## 4.6 Untersuchungen mithilfe des Conley-Index

In diesem Unterabschnitt werden die Überlegungen von C. Conley und J. Smoller (siehe [CS74] und [Smo94]) aus der allgemeinen Magnetohydrodynamik auf die isotherme Magnetohydrodynamik übertragen.

Wir konstruieren für jede Wahl von Parametern  $\delta = (\mu, \nu, \eta) > 0$  und  $j \in (-\infty, +\infty), c \in (0, +\infty)$  eine kompakte, isolierte invariante Menge  $S$ , die aus allen Punkten besteht, welche zu vollständigen und beschränkten Orbits in der Menge  $\{v > 0\}$  von physikalisch relevanten Zuständen gehören. Dabei seien die Parameter  $\delta$  und  $c$  im gesamten Abschnitt fixiert, während im letzten Teil des Abschnitts der Parameter  $j$  variiert wird. Um die Abhängigkeit der Menge  $S$  von  $j$  zu betonen, schreiben wir daher

$$S = S(j).$$

Die erste wichtige Eigenschaft der Menge  $S$  ist ihre Beschränktheit, deren Beweis wir aufgrund seiner Länge in den Anhang C.1 verschieben.

### Satz 4.6.1.

*S ist eine beschränkte Menge.*

BEWEIS. Siehe Anhang C.1. ■

Wir bezeichnen mit  $R$  die Menge aller Ruhelagen und formulieren nun die entscheidende Eigenschaft von  $S$ , nämlich dass es sich um eine isolierte invariante Menge handelt, die stetig von ihren Parametern abhängt; der Beweis ist aufgrund seiner Länge ebenfalls in den Anhang verschoben worden.

**Satz 4.6.2.**

Für fest gewählte Parameter  $(\delta, j, c)$  ist  $S = S(j) \supset R$  eine isolierte invariante Menge und für jedes beliebige kompakte Intervall  $J \subset (-\infty, +\infty)$  ist

$$\{S(j)\}_{j \in J}$$

eine stetige Familie.

BEWEIS. Siehe Anhang C.2. ■

**Satz 4.6.3.**

Für fest gewählte Parameter  $(\delta, j, c)$  gilt

$$h(S(j)) = \bar{0}.$$

BEWEIS. Für genügend kleine Werte von  $j$  besitzt das System keine Ruhelagen und aufgrund der gradientenartigen Struktur ist  $S$  dann leer. Wir betrachten eine solche hinreichend kleine Zahl  $\tilde{j} \in \mathbb{R}$ , sodass zu den Parametern  $(\delta, \tilde{j}, c)$  keine Ruhelagen existieren, und das Intervall  $J := [\tilde{j}, j]$ .

Nach dem Satz 4.6.2 ist die Familie

$$\{S(j)\}_{j \in J}$$

eine stetige Familie, deshalb liefert das Theorem 4.6.2 wegen  $h(\emptyset) = \bar{0}$  die Identität

$$h(S(j)) = h(S(\tilde{j})) = \bar{0}. \quad \blacksquare$$

Wähle eine Konstante  $k$ , sodass  $P(\mathbf{u}_1) < k < P(\mathbf{u}_2)$  gilt und definiere die Mengen

$$\begin{aligned} S_{01} &:= S \cap \{P < k\}, \\ S_{12} &:= S \cap \{P(\mathbf{u}_1) - \varepsilon < P < P(\mathbf{u}_2) + \varepsilon\} \end{aligned}$$

und

$$S_{23} := S \cap \{P > k\}.$$

Diese Mengen sind isolierte invariante Mengen und es gilt

$$\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1 \in S_{01}, \quad \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in S_{12}, \quad \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3 \in S_{23}.$$

$S_{01}$  und  $S_{23}$  haben (aus dem gleichen Grund wie  $S$ ) ebenfalls den Index  $\bar{0}$ .

Weiterhin gelten nach Folgerung 2.3.5

$$h(\mathbf{u}_0) \vee h(\mathbf{u}_1) = \Sigma^0 \vee \Sigma^1 \neq \bar{0},$$

$$h(\mathbf{u}_1) \vee h(\mathbf{u}_2) = \Sigma^1 \vee \Sigma^1 \neq \bar{0}$$

und

$$h(\mathbf{u}_2) \vee h(\mathbf{u}_3) = \Sigma^1 \vee \Sigma^2 \neq \bar{0}.$$

Mithilfe des Theorems 2.3.23 folgern wir die Aussagen über die Existenz der Struktur der Schockwellen unmittelbar.

**Theorem 4.6.4.**

*Der schnelle und der langsame Schock besitzen für alle Parameterwerte Profile.*

BEWEIS. Wir wenden das zuvor formulierte Theorem auf  $S = S_{01}$  bzw. auf  $S = S_{23}$  an. ■

**Bemerkung 4.6.5.**

- (i) Auf den Index von  $S_{12}$  kann man nicht in der gleichen Weise mithilfe der Fortsetzungseigenschaft schließen, denn man findet keine passende Umgebung  $N$ : Durch Verkleinern von  $j$  rücken die Punkte  $\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1$  und  $\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$  beliebig nahe zusammen und folglich enthält jede Umgebung  $N \supset S_{12}$  einen der Punkte  $\mathbf{u}_0$  oder  $\mathbf{u}_3$  für hinreichend kleines  $j$ .
- (ii) Die vorangehenden Überlegungen lassen sich auf gewisse Fälle mit singulärer Viskosität übertragen (wie in [CS75]), doch diese Idee wird hier nicht weiter verfolgt. ◇

## 4.7 Untersuchungen mithilfe von Zusammenhangsmatrizen

### 4.7.1 Der uneingeschränkte Fall

Wir können mithilfe der Zusammenhangsmatrizen die Aussagen für den schnellen und langsamen Orbit aus einer kleinen Rechnung erneut erhalten.

Wir betrachten im Folgenden immer die Morse-Zerlegung

$$M(S) = \{\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$$

mit der Halbordnung, die durch die Ungleichungen der Energie  $P$  gegeben ist.

**Satz 4.7.1.**

*Jede Zusammenhangsmatrix zur Morse-Zerlegung  $M(S)$  hat die Gestalt*

$$\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

BEWEIS. Zur Berechnung benutzen wir

$$H_n(i) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & \text{für } n = 5 - i, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$h(S) = \bar{0}.$$

Nach Definition der Zusammenhangsmatrix hat  $\Delta$  folgende Gestalt:

$$\Delta = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

unter Benutzung weiterer Eigenschaften von  $\Delta$  lassen sich  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$  berechnen.

**1. SCHRITT:** Wegen  $\Delta^2 = 0$  gilt

$$\alpha\beta = \beta\gamma = 0. \quad (*)$$

**2. SCHRITT:** Wir benutzen wiederholt  $H_n\Delta \cong H_n(h(S); \mathbb{Z}_2)$ .

$$H_3\Delta = \ker \Delta_3 / \text{im } \Delta_4 = 0 \iff \begin{cases} \alpha = 0 \text{ und } \beta = 1 \\ \alpha = 1 \end{cases} \quad (**)$$

$$H_4\Delta = \ker \Delta_4 / \text{im } \Delta_5 = 0 \iff \begin{cases} \beta = 0 \text{ und } \gamma = 1 \\ \beta = 1 \end{cases}$$

$$H_5\Delta = \ker \Delta_5 / \text{im } \Delta_6 = 0 \iff \gamma = 1 \quad (***)$$

**3. SCHRITT:** Wir erhalten insgesamt

$$(***) \implies \gamma = 1 \xrightarrow{(*)} \beta = 0 \xrightarrow{(**)} \alpha = 1. \quad \blacksquare$$

### Folgerung 4.7.2.

Es existieren Orbits  $0 \rightarrow 1$  und  $2 \rightarrow 3$ .

### 4.7.2 Der koplanare Fall

#### Satz 4.7.3.

Jede Zusammenhangsmatrix zur Morse-Zerlegung  $M(S)$  hat die Gestalt

$$\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

mit  $\beta \in \mathbb{Z}_2$ .

**BEWEIS. 1. SCHRITT: Vorbereitung.**

Zur Berechnung benutzen wir

$$H_n(0) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & \text{für } n = 3, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$
$$H_n(1) = H_n(2) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & \text{für } n = 2, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$
$$H_n(3) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & \text{für } n = 1, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$h(S) = \bar{0}.$$

Nach Definition der Zusammenhangsmatrix hat  $\Delta$  folgende Gestalt:

$$\Delta = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 & \delta \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**2. SCHRITT: Berechnung von  $\gamma$  und  $\delta$ .**

Aus der Bedingung  $\Delta^2 = 0$  ergibt sich  $\alpha\gamma + \beta\delta = 0$ , d.h.  $(\alpha, \beta)$  und  $(\delta, \gamma)$  sind parallel. Wir schreiben die Komponenten der graduierten Abbildung  $\Delta$  einzeln:

$$\begin{aligned} \Delta_4 &: 0 \rightarrow \cdot \\ \Delta_3 &: H_3(0) \rightarrow H_2(1) \oplus H_2(2), x \mapsto (\delta x, \gamma x) \\ \Delta_2 &: H_2(1) \oplus H_2(2) \rightarrow H_1(3), (x, y) \mapsto (\beta x + \alpha y) \\ \Delta_1 &: H_1(3) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Die Berechnung der Kerne und Bilder dieser Abbildung führt schließlich auf:

$$H_1 = \ker \Delta_1 / \text{im } \Delta_2 = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & \text{falls } (\alpha, \beta) = (0, 0), \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$
$$H_2 = \ker \Delta_2 / \text{im } \Delta_3 = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & \text{falls } (\gamma, \delta) = (0, 0), \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Wegen  $H_i = H_i(h(S)) = 0$  folgt daraus  $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$  und  $(\gamma, \delta) \neq (0, 0)$ . Also gilt  $\alpha = \delta$  und  $\beta = \gamma$  und diese dürfen nicht gleichzeitig 0 sein.

**3. SCHRITT: Berechnung von  $\alpha$ .**

Wir wenden die Eigenschaft (CM4) auf das Intervall  $\{0, 1\}$  an, denn

$$H(S_{01}) = 0 \tag{4.8}$$

ist bekannt (nach 4.6). Die interessierende Abbildung ist

$$\Delta := \Delta(I) : H(0) \oplus H(1) \rightarrow H(0) \oplus H(1),$$

deren einzige nichttriviale Bestandteile in den Graden  $n = 2$  und  $n = 3$  auftreten:

$$\begin{aligned} \Delta_2 : H_2(1) &\rightarrow 0, x \mapsto 0 \\ \Delta_3 : H_3(0) &\rightarrow H_2(1), x \mapsto \alpha x. \end{aligned}$$

Folglich erhalten wir

$$\ker \Delta_n \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & \text{für } n \in \{2, 3\} \text{ und } \alpha = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{und} \quad \text{im } \Delta_n \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & \text{für } n = 3 \text{ und } \alpha = 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Daraus lassen sich leicht die Homologie-Gruppen berechnen und es folgt

$$H_n \Delta = 0 \text{ für } n \neq 0 \quad \text{und} \quad H_n \Delta \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & \text{für } \alpha = 0 \\ 0 & \text{für } \alpha = 1, \end{cases}$$

woraus wir mit (4.8)  $\alpha = 1$  ablesen. ■

**Bemerkung 4.7.4.**

Wie im uneingeschränkten Fall lässt die erhaltene Form der Zusammenhangsmatrix für das koplanare Regime unmittelbar auf die Existenz eines schnellen und eines langsamen Orbits schließen. H. Hattori und K. Mischaikow beweisen in [HM90, Proposition 4.10] dieses Resultat technisch aufwendiger, nämlich mithilfe von *Übergangsmatrizen*, welche die Beziehung zwischen Zusammenhangsmatrizen zu verschiedenen Parameterwerten beschreiben. Wir unterdrücken im vorliegenden Text deren Diskussion, zitieren aber am Ende ein Resultat, für dessen Beweis (den wir jedoch nicht ausführen) sie doch benötigt werden. Für weitere Informationen verweisen wir auf [HM90] und [FM98]. ◇

Aufgrund vorangegangener Resultate können wir jedoch die Gestalt der Zusammenhangsmatrix in gewissen Bereichen des Parameterraumes  $\{(\delta, c) : \delta \in \mathbb{R}_+^3, c \in [0, c^*]\}$  angeben, wobei  $c^* > 0$  beliebig vorgegeben ist und  $j$  so gewählt sei, dass zu  $c = c^*$  (und damit zu jedem  $c \in [0, c^*]$ ) alle vier Ruhelagen existieren.

**Folgerung 4.7.5.**

Für  $\lambda_1 = (\delta, 0)$  gilt

$$\Delta_{\lambda_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

BEWEIS. Aus der Symmetrie des Systems ( $\Sigma_0^3$ ) folgt die Homöomorphie von  $S_{01}$  und  $S_{02}$  sowie von  $S_{13}$  und  $S_{23}$ . Deshalb stimmen auch die Homologiegruppen überein, d.h.

$$H(01) = H(02) = H(13) = H(23) = 0.$$

Benutzen wir dies zusammen mit der Eigenschaft (CM4), dann können wir durch eine analoge Rechnung wie im 3. Schritt des Beweises von Satz 4.7.3 zeigen, dass (in der dort verwendeten Notation) auch  $\beta = 1$  gilt. ■

**Folgerung 4.7.6.**

Sei  $c \in [0; c^*]$ . Es gibt ein  $\delta$ , sodass für  $\lambda_2 = (\delta, c)$  gilt:

$$\Delta_{\lambda_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

BEWEIS. Nach 4.5.1 gibt es solche Parameter  $\delta$ , für die keine intermediären Profile existieren, also muss (mit den Bezeichnungen von 4.7.3)  $\beta = 0$  gelten. ■

Wir schließen den Abschnitt mit einer letzten Proposition ab, die wir aus [HM90] zitieren und welche eine grobe Beschreibung der globalen Bifurkation zum Gegenstand hat. Dabei betrachtet man den vereinfachten Parameterraum

$$\Lambda = \left\{ (\kappa, c) : \kappa = \frac{\mu}{\max\{\nu, \eta\}} > 0, c \in [0, c^*] \right\}.$$

**Satz 4.7.7.**

Es existiert eine Menge  $L \subset \text{int } \Lambda$ , sodass

$$\Lambda \setminus L = \Lambda_1 \cup \Lambda_2, \Lambda_1 \cap \Lambda_2 = \emptyset, \lambda_1 \in \Lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda_2$$

gilt und weiterhin  $C(1, 2) \neq \emptyset$  für  $\lambda \in L$ .

BEWEIS. Siehe [HM90, Proposition 4.13] ■

**Bemerkung 4.7.8.**

Dieser Satz entspricht dem Bilde, das man von dieser Situation mithilfe numerischer Betrachtungen gewonnen hat. In einigen Bereichen des Parameterraums  $\Lambda$  kann man die Gestalt der Menge  $L$  (dank Resultaten der Störungstheorie) genauer beschreiben: Es handelt sich dort um eine Kurve. Aus diesem Grunde vermutet man, dass es sich bei der Menge  $L$  vielleicht überhaupt um eine (möglicherweise glatte) Kurve handelt; dies impliziert die Existenz eines  $\kappa^* = \kappa^*(c)$  für jedes  $c$  derart, dass für (a)  $\kappa > \kappa^*$ , (b)  $\kappa = \kappa^*$ , (c)  $\kappa < \kappa^*$  jeweils (a) alle intermediären Schockwellen, (b) nur der intermediäre Schock  $1 \rightarrow 2$ , (c) keiner der intermediären Schocks viskose Profile besitzen. ◇



## A Die Profil-Gleichung

### A.1 Herleitung der Gleichungen

Wir gehen von den Gesetzen der Elektrodynamik und der Gasdynamik aus, wie sie in Unterabschnitt 1.4.1 genannt wurden:

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0 \quad (\text{A.1})$$

$$\partial_t(\rho \vec{v}) + \operatorname{div}(\rho \vec{v} \otimes \vec{v} + p \operatorname{Id}) - (\operatorname{rot} \vec{B}) \times \vec{B} = 0 \quad (\text{A.2})$$

$$\partial_t \vec{B} - \operatorname{rot}(\vec{v} \times \vec{B}) = 0 \quad (\text{A.3})$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (\text{A.4})$$

Wir nehmen an, alle Größen hängen nur von einer Raumvariablen  $x := x_1$  ab. Dann nehmen die Gleichungen eine einfachere Gestalt an.

Aus (A.4) folgt  $\partial_x B_1 = 0$ , d.h.

$$a := B_1 = \text{const}$$

und aus (A.1) folgt

$$\partial_t \rho + \partial_x(\rho v) = 0.$$

Mit den Bezeichnungen

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v \\ w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}, \quad \vec{B} = \begin{pmatrix} a \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

erhält man aus (A.2) die Gleichungen

$$\partial_t(\rho v) + \partial_x \left( \rho v^2 + p + \frac{1}{2} |\mathbf{b}|^2 \right) = 0$$

und

$$\partial_t(\rho \mathbf{w}) + \partial_x(\rho v \mathbf{w} - a \mathbf{b}) = 0.$$

Unter Verwendung von

$$\vec{v} \times \vec{B} = \begin{pmatrix} w_1 b_2 - w_2 b_1 \\ a w_2 - v b_2 \\ v b_1 - a w_1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \operatorname{rot}(\vec{v} \times \vec{B}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \partial_x(a \mathbf{w} - v \mathbf{b}) \end{pmatrix}$$

ergibt sich aus (A.3) die Gleichung

$$\partial_t \mathbf{b} + \partial_x (v\mathbf{b} - a\mathbf{w}) = 0.$$

Die Gleichungen der idealen isothermen Magnetohydrodynamik in einer Raumvariablen lauten also:

$$\begin{aligned} \partial_t \rho + \partial_x (\rho v) &= 0 \\ \partial_t (\rho v) + \partial_x \left( \rho v^2 + p + \frac{1}{2} |\mathbf{b}|^2 \right) &= 0 \\ \partial_t (\rho \mathbf{w}) + \partial_x (\rho v \mathbf{w} - a\mathbf{b}) &= 0 \\ \partial_t \mathbf{b} + \partial_x (v\mathbf{b} - a\mathbf{w}) &= 0 \end{aligned} \tag{A.5}$$

Die Gleichungen der dissipativen isothermen Magnetohydrodynamik in einer Raumvariablen unterscheiden sich von dem System (A.5) um Viskositätsterme auf der rechten Seite der Gleichungen:

$$\begin{aligned} \partial_t \rho + \partial_x (\rho v) &= 0 \\ \partial_t (\rho v) + \partial_x \left( \rho v^2 + p + \frac{1}{2} |\mathbf{b}|^2 \right) &= \mu \partial_{xx} v \\ \partial_t (\rho \mathbf{w}) + \partial_x (\rho v \mathbf{w} - a\mathbf{b}) &= \nu \partial_{xx} \mathbf{w} \\ \partial_t \mathbf{b} + \partial_x (v\mathbf{b} - a\mathbf{w}) &= \eta \partial_{xx} \mathbf{b}. \end{aligned} \tag{A.6}$$

Wir verfolgen den *travelling wave*-Ansatz, d.h. wir suchen Lösungen  $u = u(x, t)$  der Form

$$u(x, t) = \phi(x - st) \quad \text{mit} \quad \phi(\pm\infty) = u_{\pm}$$

mit einer geeigneten reellen Funktion  $\phi$ , die nur von einem skalaren Argument abhängt, und geeigneten Zuständen  $u_{\pm}$ , die durch den Schock auseinander hervorgehen; dabei ist  $s$  die Ausbreitungsgeschwindigkeit. Die Funktion  $\phi$  wird als *Profil* bezeichnet und ist durch diese Forderung nur bis auf eine additive Konstante im Argument eindeutig bestimmt.

In diesem Kontext können wir – bekanntermaßen ohne Einschränkung der Allgemeinheit – die Zeitableitungen weglassen (denn durch einen linearen Koordinatenwechsel können wir das Verschwinden der Zeitableitungen stets erreichen). Diese spezielle Koordinaten-Wahl hat eine Erhaltungsgröße zur Folge:  $\partial_x (\rho v) = 0$ , d.h.

$$\rho v =: m = \text{const.}$$

Einsetzen in (A.6) führt auf folgendes System gewöhnlicher Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} \mu \partial_{xx} v &= \partial_x \left( mv + p + \frac{1}{2} |\mathbf{b}|^2 \right) \\ \nu \partial_{xx} \mathbf{w} &= \partial_x (m\mathbf{w} - a\mathbf{b}) \\ \eta \partial_{xx} \mathbf{b} &= \partial_x (v\mathbf{b} - a\mathbf{w}) \end{aligned}$$

Diese Gleichungen lassen sich sämtlich einmal integrieren, und wir erhalten unter Einführung der fünf Integrationskonstanten

$$j \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{c}, \tilde{\mathbf{c}} \in \mathbb{R}^2$$

das folgende System (dabei sei  $Y' \equiv dY/dx$ ):

$$\begin{aligned} \mu v' &= mv + p(v) + \frac{1}{2} |\mathbf{b}|^2 - j \\ \nu \mathbf{w}' &= m\mathbf{w} - a\mathbf{b} - \tilde{\mathbf{c}} \\ \eta \mathbf{b}' &= v\mathbf{b} - a\mathbf{w} - \mathbf{c} \end{aligned} \tag{A.7}$$

## A.2 Verminderung der Anzahl der Parameter

Um das System A.7 zu vereinfachen, zeigen wir zunächst, dass sich die Anzahl der Parameter auf zwei reduzieren lässt.

### **Lemma A.2.1.**

*Es ist keine Einschränkung der Allgemeinheit, die Parameterwerte*

$$\tilde{\mathbf{c}} = 0, \quad \text{und} \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}$$

*mit einer Zahl  $c \geq 0$  anzunehmen.*

Nach Anwendung dieses Lemmas, nimmt das System (A.7) die Gestalt

$$\begin{aligned} \mu v' &= mv + p(v) + \frac{1}{2} |\mathbf{b}|^2 - j \\ \nu \mathbf{w}' &= m\mathbf{w} - a\mathbf{b} \\ \eta \mathbf{b}' &= v\mathbf{b} - a\mathbf{w} - \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{\Sigma^5}$$

an.

BEWEIS. Die Galilei-Invarianz erlaubt lineare Transformationen, ohne dass sich die Gestalt der Gleichungen ändert. Der lineare Koordinatenwechsel

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= \bar{\mathbf{w}} + \frac{1}{m} \tilde{\mathbf{c}} \\ \mathbf{c} &= \bar{\mathbf{c}} - \frac{a}{m} \tilde{\mathbf{c}} \end{aligned}$$

überführt (A.7) in das folgende System (in dem  $\bar{\mathbf{w}}$  wieder mit  $\mathbf{w}$  und  $\bar{\mathbf{c}}$  wieder mit  $\mathbf{c}$  bezeichnet ist).

$$\begin{aligned} \mu v' &= mv + p(v) + \frac{1}{2} \|\mathbf{b}\|^2 - j \\ \nu \mathbf{w}' &= m\mathbf{w} - a\mathbf{b} \\ \eta \mathbf{b}' &= v\mathbf{b} - a\mathbf{w} - \mathbf{c} \end{aligned} \tag{A.8}$$

Das System (A.8) ist rotationsinvariant, d.h. es bleibt in seiner Form unverändert, wenn man  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$ ,  $\mathbf{w}$  durch  $A\mathbf{b}$ ,  $A\mathbf{c}$ ,  $A\mathbf{w}$  ersetzt mit einer Rotationsmatrix  $A \in \text{SO}(2)$ . Wir wählen diese Matrix derart, dass

$$A\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit einem  $c \geq 0$  erfüllt ist. Auf diese Weise nimmt das vorliegende System die behauptete Form  $(\Sigma^5)$  an. ■

**Bemerkung A.2.2.**

Unter einer zusätzlichen Annahme an die Funktion  $p(v)$  (nämlich Homogenität bezüglich eines beliebigen Exponenten), ist das System überdies invariant unter Skalierungen und man kann ohne Einschränkung

$$a = 1 \quad \text{und} \quad m = 1$$

voraussetzen. Beispielsweise erfüllt das Gas-Gesetz  $p(v) = kv^{-\gamma}$  diese Annahme und das System  $(\Sigma^5)$  nimmt die Form

$$\begin{aligned} \mu v' &= v + p(v) + \frac{1}{2} |\mathbf{b}|^2 - j \\ \nu \mathbf{w}' &= \mathbf{w} - \mathbf{b} \\ \eta \mathbf{b}' &= v\mathbf{b} - \mathbf{w} - \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{A.9}$$

an. ◇

## B Die partiellen Differentialgleichungen der IMHD

### B.1 Berechnung der charakteristischen Geschwindigkeiten – Das koplanare System (3d)

Wir gehen analog zum vorangehenden Abschnitt vor und betrachten das zeitabhängige System

$$\partial_t U + \partial_x F(U) = 0$$

mit

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v \\ \rho w_1 \\ b_1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad F(U) = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho v^2 + p + 1/2 |b|^2 \\ \rho v w_1 - b_1 \\ v b_1 - w_1 \end{pmatrix}.$$

Die Linearisierung lautet

$$D := F'(U) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -v^2 + p'(\rho) & 2v & 0 & b \\ -vw & w & v & -a \\ \frac{aw - vb}{\rho} & \frac{b}{\rho} & -\frac{a}{\rho} & v \end{pmatrix}.$$

Entwickeln der Determinante führt auf die charakteristische Gleichung

$$(v - \lambda)^4 - (c_a^2 + c_b^2 + c_s^2)(v - \lambda)^2 + c_a^2 c_s^2 = 0,$$

d.h. der Term  $v - \lambda$  erfüllt dieselbe Gleichung wie die magnetoakustischen Geschwindigkeiten. Also erhalten wir vier Eigenwerte  $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_4$  mit:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= v - c_+ \\ \lambda_2 &= v - c_- \\ \lambda_3 &= v + c_- \\ \lambda_4 &= v + c_+ \end{aligned}$$

Mit dieser Information lässt sich nun leicht zeigen, dass einige Eigenwerte zusammenfallen können, d.h. das System ist *nichtstrikt* hyperbolisch.

Für  $b \neq 0$  gilt  $c_+ \neq c_-$ , d.h. es gilt  $\lambda_1 < \dots < \lambda_4$ . Für  $b = 0$  hingegen gilt  $c_b = 0$  und

folglich

$$\begin{aligned}
c_{\pm}^2 &= \frac{1}{2} (c_a^2 + c_b^2 + c_s^2) \pm \sqrt{\frac{1}{4} (c_a^2 + c_b^2 + c_s^2)^2 - c_a^2 c_s^2} \\
&= \frac{1}{2} (c_a^2 + c_s^2) \pm \sqrt{\frac{1}{4} (c_a^2 + c_s^2)^2 - c_a^2 c_s^2} \\
&= \frac{1}{2} (c_a^2 + c_s^2) \pm \frac{1}{2} |c_a^2 - c_s^2|.
\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich  $c_+ = \max\{c_a, c_s\}$  und  $c_- = \min\{c_a, c_s\}$ . Sei  $\sigma = \sigma(\rho) := c_s - c_a$ , dann definiert  $\sigma = 0$  einen Punkt im Zustandsraum, bei welchem  $c_s = c_a$  gilt.

An Punkten  $(\rho, v, w, b)$  mit  $b = 0$  und  $\sigma(\rho) = 0$  gilt  $\lambda_1 = \lambda_2 < \lambda_3 = \lambda_4$ . Bei allen anderen Punkten sind die vier Eigenwerte paarweise verschieden.

## B.2 Berechnung der charakteristischen Geschwindigkeiten – Das uneingeschränkte System

Wir betrachten das zeitabhängige System

$$\partial_t U + \partial_x F(U) = 0$$

mit

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v \\ \rho w_1 \\ \rho w_2 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad F(U) = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho v^2 + p(\rho) + 1/2 |b|^2 \\ \rho v w_1 - a b_1 \\ \rho v w_2 - a b_2 \\ v b_1 - a w_1 \\ v b_2 - a w_2 \end{pmatrix}.$$

Die Linearisierung lautet

$$D := F'(U) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -v^2 + p'(\rho) & 2v & 0 & 0 & b_1 & b_2 \\ -v w_1 & w_1 & v & 0 & -a & 0 \\ -v w_2 & w_2 & 0 & v & 0 & -a \\ \frac{a w_1 - v b_1}{\rho} & \frac{b_1}{\rho} & -\frac{a}{\rho} & 0 & v & 0 \\ \frac{a w_2 - v b_2}{\rho} & \frac{b_2}{\rho} & 0 & -\frac{a}{\rho} & 0 & v \end{pmatrix}.$$

Durch Entwickeln der Determinante erhält man die charakteristische Gleichung

$$((v - \lambda)^2 - c_a^2) \left( (v - \lambda)^4 - (c_a^2 + c_b^2 + c_s^2)(v - \lambda)^2 + c_a^2 c_s^2 \right) = 0,$$

und daraus die sechs Eigenwerte  $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_6$  mit

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= v - c_+ \\ \lambda_2 &= v - c_a \\ \lambda_3 &= v - c_- \\ \lambda_4 &= v + c_- \\ \lambda_5 &= v + c_a \\ \lambda_6 &= v + c_+.\end{aligned}$$

Für  $b_1 \neq 0$  sind die Eigenwerte paarweise verschieden. Für  $b_1 = 0$  gilt nach der im vorangehenden Abschnitt durchgeführten Rechnung  $c_+ = \max\{c_a, c_s\}$  und  $c_- = \min\{c_a, c_s\}$ ; setzen wir wieder  $\sigma := c_s - c_a$ , so ergeben sich nun mehrere Fälle, nämlich:  
Wenn  $\sigma > 0$  ist, dann gilt  $c_+ = c_s$  und  $c_- = c_a$ , d.h.  $\lambda_1 < \lambda_2 = \lambda_3 < \lambda_4 = \lambda_5 < \lambda_6$ .  
Wenn  $\sigma < 0$  ist, dann gilt  $c_+ = c_a$  und  $c_- = c_s$ , d.h.  $\lambda_1 = \lambda_2 < \lambda_3 < \lambda_4 < \lambda_5 = \lambda_6$ .  
Wenn  $\sigma = 0$  ist, dann gilt  $c_+ = c_- = c_s = c_a$ , d.h.  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 < \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6$ .

## C Beweise von Abschnitt 4.6

### C.1 Beschränktheit von $S$

#### Lemma C.1.1.

Für jeden Punkt  $(v, \mathbf{w}, \mathbf{b}) \in S$  gilt:  $m \cdot v \leq j$ .

BEWEIS. Sei  $\gamma \subset S$  ein beschränkter vollständiger Orbit. Für die  $v$ -Komponente gilt aufgrund der Differentialgleichung die Implikation

$$m \cdot v(t) > j \implies v'(t) > 0$$

wegen

$$v'(t) = \frac{1}{\mu} \left( m \cdot v(t) + p(v(t)) + \frac{1}{2} |\mathbf{b}(\mathbf{t})|^2 - j \right) > m \cdot v(t) - j > 0$$

und somit folgt aus

$$m \cdot v(t_0) > j \quad \text{für ein } t_0 \in \mathbb{R}$$

bereits, dass

$$m \cdot v(t) > j \quad \text{für alle } t \in (t_0, \infty)$$

gilt; denn: Angenommen es gibt ein  $t_0$ , sodass  $m \cdot v(t_0) > j$  erfüllt ist. Falls die Menge

$$\{t > t_0 : m \cdot v(t) \leq j\}$$

nicht leer ist, so besitzt sie aufgrund der Beschränktheit nach unten ein Infimum

$$t_* := \inf \{t > t_0 : m \cdot v(t) \leq j\}.$$

Für  $t \in (t_0, t_*)$  gilt  $m \cdot v(t) > j$ , also nach der obigen Überlegung  $v'(t) > 0$ . Deshalb erhalten wir nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung die Abschätzung

$$0 > v(t_*) - v(t_0) = v'(\tau)(t_* - t_0) > 0$$

mit einem  $\tau \in (t_0, t_*)$ . WIDERSPRUCH. ■

Zur notationellen Vereinfachung des nachfolgenden Beweises setzen wir (ähnlich wie in [Smo94])

$$z := \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{d} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -c \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{und} \quad \tilde{A} := \begin{pmatrix} m & 0 & -a & 0 \\ 0 & m & 0 & -a \\ -a & 0 & v & 0 \\ 0 & -a & 0 & v \end{pmatrix} \quad (\text{C.1})$$

$$\text{sowie } B := \text{diag}\{v, v, \eta, \eta\}, \quad d := B^{-1}\tilde{d} \quad \text{und} \quad A := B^{-1}\tilde{A}.$$



Mit diesen Bezeichnungen lassen sich die Gleichungen für  $b_1, b_2, w_1, w_2$  des Systems ( $\Sigma^5$ ) in der konzisen Form

$$Bz' = \tilde{A}z + \tilde{d} \quad (\text{C.2})$$

zusammenfassen.

**Satz C.1.2.**

Es gibt eine Konstante  $M > 0$ , sodass für jeden Punkt  $(v, \mathbf{w}, \mathbf{b}) \in S$  gilt:

$$|(w_1, w_2, b_1, b_2)| = |z| \leq M. \quad (\text{C.3})$$

BEWEIS. **1. SCHRITT: Vorbereitung.**

Gemäß der in (C.1) eingeführten Notation gilt offenbar

$$|(w_1, w_2, b_1, b_2)| = |z|,$$

d.h. es ist nur die behauptete Ungleichung in (C.3) zu beweisen.

Wir nehmen an, der Punkt  $(v, \mathbf{w}, \mathbf{b}) \in S$  liege auf dem vollständigen beschränkten Orbit  $\gamma \subset S$ . Um die Darstellung zu erleichtern, betrachten wir vorerst nur den Fall

$$a > 0.$$

Nach Lemma C.1.1 gilt  $mv(t) \leq j$  und somit sind alle Einträge von  $\tilde{A}$  – und damit auch von  $A$  – beschränkt, d.h.

$$\exists c_1 > 0 \forall t \in \mathbb{R} : |A(t)| \leq c_1. \quad (\text{C.4})$$

**2. SCHRITT: Kontrollierte Abnahme von  $|z(t)|$ .**

Wir betrachten die aus Gleichung (C.2) durch Multiplikation von links mit  $B^{-1}$  hervorgehende Gleichung

$$z' = Az + d. \quad (\text{C.5})$$

Durch Integration von 0 bis  $t$  ergibt sich

$$z(t) - z(0) = \int_0^t A(s)z(s) + d \, ds$$

und wir können – unter Verwendung der Dreiecksungleichung für Integrale und (C.4) – in der folgenden Weise abschätzen:

$$|z(t) - z(0)| \leq |d|t + c_1 \int_0^t |z(s)| \, ds \leq c_2 t + c_1 \int_0^t |z(s) - z(0)| \, ds$$

mit einer Konstanten  $c_2 := |z(0)| + |d| > 0$ . Aus dieser Ungleichung folgt nach dem Lemma von Grönwall (und wegen  $e^t > t$  für  $t \in \mathbb{R}$ )

$$|z(t) - z(0)| \leq c_2 t e^{c_1 t} \leq c_2 e^{2c_1 t},$$

also erhalten wir schließlich eine Abschätzung für  $|z(t)|$  nach unten:

$$|z(t)| \geq |z(0)| - c_2 e^{2c_1 t}.$$

Seien  $T, K \in \mathbb{R}$  vorgegeben und  $M \in \mathbb{R}$  so gewählt, dass die Bedingung

$$M > K + c_2 e^{2c_1 T}$$

erfüllt ist. Dann gilt längs Teilstücken von Orbits der Zeitdauer  $T$  die Abschätzung

$$|z(t)| \geq |z(0)| - c_2 e^{2c_1 t} > M - c_2 e^{2c_1 T} > K,$$

falls das Teilstück bei einem Punkt  $z(0) \in S$  mit  $|z(0)| > M$  beginnt.

Mit anderen Worten, findet man für jede beliebige Wahl von Konstanten  $T, K \in \mathbb{R}$  eine Konstante  $M > 0$  derart, dass entlang eines Orbitsegmentes der Zeitdauer  $T$  mit einem Anfangspunkt

$$z(0) \in \{\mathbf{u} \in S : |\mathbf{u}| > M\}$$

stets  $|z(t)| > K$  für  $t \in [0, T]$  gilt.

**3. SCHRITT:** Verhalten der  $(w_1, b_1)$ -Komponente für „große“  $|z|$ .

Wir betrachten in diesem Schritt jeweils zwei der Komponenten von  $z$  gemeinsam und setzen zu diesem Zweck

$$x := \begin{pmatrix} w_1 \\ b_1 \end{pmatrix} \text{ und } y := \begin{pmatrix} w_2 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

Weiters führen wir Polarkoordinaten in der  $w_1 - b_1$ -Ebene ein und dazu sei

$$\vartheta := \arctan\left(\frac{b_1}{w_1}\right)$$

mit  $\vartheta \equiv 0 \pmod{2\pi}$  auf der positiven  $w_1$ -Achse. Dann ist

$$x = |x| \begin{pmatrix} \cos \vartheta \\ \sin \vartheta \end{pmatrix}.$$

**Teilschritt 3.A:** Differentialgleichung für  $\vartheta$ .

Mit den Gleichungen

$$\begin{aligned} w_1' &= \frac{1}{\nu}(mw_1 - ab_1) \\ b_1' &= \frac{1}{\eta}(-aw_1 + vb_1 - c) \end{aligned}$$

für  $w_1$  bzw.  $b_1$  erhält man

$$\vartheta' = \frac{1}{1 + (b_1/w_1)^2} \left( \frac{b_1'}{w_1} - \frac{b_1 w_1'}{w_1^2} \right) = \frac{1}{|x|^2} (w_1 b_1' - w_1' b_1)$$

und schließlich

$$\vartheta' = -\frac{a}{\eta} \cos^2 \vartheta + \left( \frac{v}{\eta} - \frac{m}{v} \right) \sin \vartheta \cos \vartheta + \frac{a}{v} \sin^2 \vartheta + \frac{c}{|x|\eta} \cos \vartheta.$$

**Teilschritt 3.B:** Abschätzung für  $\vartheta'$ .

Gelten  $m v \leq j$  und  $|x| \geq K$  (wobei  $K$  im Sinne des 2. Schrittes hinreichend groß sei), so finden wir Zahlen  $\alpha > 0$  und  $c_3 < 0$ , sodass innerhalb des Kegels

$$\{x : |\vartheta| \leq \alpha\}$$

die Ungleichung

$$\vartheta' \leq c_3 < 0 \tag{C.6}$$

gilt.

*Begründung:* Auf dem Intervall  $[0, \pi/2]$  ist die Sinus-Funktion streng monoton wachsend und die Cosinus-Funktion ist streng monoton fallend. Für  $0 < \alpha < \pi/2$  folgt aus

$$-\alpha \leq \vartheta \leq \alpha,$$

dass

$$-\sin \alpha \leq \sin \vartheta \leq \sin \alpha$$

und

$$1 \geq \cos \vartheta \geq \cos \alpha$$

gelten. Daher folgt

$$\begin{aligned} \vartheta' &\stackrel{(*)}{\leq} -\frac{a}{\eta} \cos^2 \alpha + \left| \frac{v}{\eta} - \frac{m}{v} \right| \sin \alpha + \frac{a}{v} \sin^2 \alpha + \frac{c}{|x|\eta} \\ &= \frac{c}{|x|\eta} - \frac{a}{\eta} + \left| \frac{v}{\eta} - \frac{m}{v} \right| \sin \alpha + \left( \frac{a}{\eta} + \frac{a}{v} \right) \sin^2 \alpha. \end{aligned}$$

Weil die rechte Seite der letzten Zeile stetig in  $\alpha$  und strikt kleiner als 0 für  $\alpha = 0$  ist, können wir ein  $c_3$  finden, sodass  $\vartheta' \leq c_3 < 0$  erfüllt ist, falls  $\alpha$  klein genug ist.

**Teilschritt 3.C:** Die Ungleichung (\*).

Sei  $F = \left( \frac{v}{\eta} - \frac{m}{v} \right)$ . Wenn  $F = 0$  ist, so ist die Behauptung trivial. Andernfalls unterscheiden wir die zwei Fälle  $F > 0$  und  $F < 0$ :

$F > 0$ : Dann ist  $F = |F|$  und

$$F \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \vartheta \leq F \cdot \sin \alpha \cdot 1.$$

$F < 0$ : Dann ist  $-F = |F|$  und

$$\sin \vartheta \cdot \cos \vartheta \geq (-\sin \alpha) \cdot \cos \vartheta,$$

also

$$F \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \vartheta \leq (-F) \cdot \sin \alpha \cdot \cos \vartheta \leq (-F) \cdot \sin \alpha \cdot 1.$$

**Teilschritt 3.D:** *Kein vollständiger Orbit verbleibt innerhalb des Kegels.*

Offensichtlich gilt für  $\vartheta = \pi/2 \pmod{\pi}$ :  $\vartheta' > 0$  (anhand der Gleichung gilt für solche  $\vartheta$  nämlich  $\vartheta' = a/v > 0$  wegen  $a > 0$ ).

Jedes Orbitsegment, längs welchem  $|x| \geq K$  und  $mv \leq j$  gilt, verläuft entweder ganz außerhalb des Kegels oder verbleibt für eine gewisse Zeit innerhalb des Kegels, die unabhängig von seiner Länge beschränkt ist: Für einen Orbit, der innerhalb des Kegels startet, gilt  $\vartheta - \vartheta_0 \leq c_3 t$  (wegen  $\vartheta' \leq c_3$ ), also

$$t \leq \frac{\vartheta_0 - \vartheta}{-c_3} < \frac{2\alpha}{-c_3}.$$

Ein Orbit, der den Kegel verlassen hat, kann nicht wieder in den Kegel gelangen. Denn: Entlang  $\vartheta = -\alpha$  gilt  $\vartheta' < 0$  und entlang  $\vartheta = 3\pi/2$  gilt  $\vartheta' > 0$ , d.h. Orbits verbleiben im IV. Quadranten der  $w_1 - b_1$ -Ebene zwischen der negativen  $b_1$ -Achse und der Geraden  $\vartheta = -\alpha$ , wenn sie sich irgendwann in diesem Bereich aufhalten.

**Teilschritt 3.E:** *Abschätzung für  $|x|$ .*

Außerhalb des Kegels gilt  $x_2^2 \geq c_4 |x|^2$  mit einem  $c_4 > 0$  (wegen  $\sin^2 \vartheta \geq \sin^2 \alpha$ ). Wähle  $K$  so groß, dass

$$c_4 K^2 > 2 \left( j + \frac{\mu}{m} \right)$$

gilt, und wähle

$$T = j + \frac{2\alpha}{|c_3|}.$$

Gemäß den Überlegungen im 1. Schritt finden wir ein  $M > 0$ , sodass für  $|x(0)| > M$  entlang jedes Orbits innerhalb der Zeit  $T$  stets  $|x| > K$  erfüllt ist.

Also gilt

$$|x(t)|^2 \geq K^2 \geq \frac{2}{c_4} \left( j + \frac{\mu}{m} \right)$$

für  $0 \leq t \leq T$ , falls  $|x(0)| > M$  gilt.

**4. SCHRITT:** *Beschränktheit von  $z$  in  $S$ .*

**Teilschritt 4.A:** *Beschränktheit von  $x$  in  $S$ .* Wir zeigen, es existiert solch ein  $M > 0$ , dass  $|x| \leq M$  auf  $S$  gilt.

Angenommen, das wäre nicht der Fall. Dann gibt es einen Orbit in  $S$ , der bei einem  $x(0)$  mit  $|x(0)| > M$  beginnt und folglich nach den Überlegungen im 3. Schritt

$$|x(t)|^2 \geq K^2 \geq \frac{2}{c_4} \left( j + \frac{\mu}{m} \right)$$

für  $0 \leq t \leq T$  erfüllt.

Falls sich dieses Orbitsegment irgendwann innerhalb des Kegels befindet, so verlässt es ihn innerhalb der Zeit  $2\alpha/(-c_3)$  (nach Teilschritt 3.D), d.h. es gilt

$$\frac{x_2(t)^2}{c_4} \geq \frac{2}{c_4} \left( j + \frac{\mu}{m} \right)$$

für ein Zeitintervall der Länge  $\geq j$ .

Falls sich dieses Orbitsegment stets außerhalb des Kegels befindet, so gilt

$$x_2(t)^2 \geq c_4 |x(t)|^2 \geq 2 \left( j + \frac{\mu}{m} \right).$$

In jedem Fall folgt aus  $|x(0)| > M$ , dass  $\frac{1}{2}x_2(t)^2 \geq j + \mu$  für ein Zeitintervall der Länge  $\geq j$  gilt. Deshalb gilt

$$\mu v' = \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1}{2}y_2^2 + mv + p(v) - j \geq \frac{1}{2}x_2^2 - j \geq \frac{\mu}{m}$$

für ein Zeitintervall der Länge  $\geq j$ , d.h.  $v' \geq \frac{1}{m}$  für ein Zeitintervall der Länge  $\geq j$ , also gilt für ein  $t \in \mathbb{R}$ :

$$v(t+j) - v(t) = \int_t^{t+j} v'(s) ds \geq \frac{j}{m},$$

was  $m \cdot v(t+j) > j$  impliziert. Dieser Orbit kann aber nach Lemma C.1.1 nicht in  $S$  liegen; daher ist die Annahme falsch und es gilt  $|x| < M$ .

**Teilschritt 4.B:** *Beschränktheit von  $y$  in  $S$ .*

Folgt durch eine zu Teilschritt A analoge Rechnung.

**5. SCHRITT:** *Abschluss des Beweises.*

Aus dem 4. Schritt folgt die Existenz von Zahlen  $M_1 > 0$  und  $M_2 > 0$ , mit denen

$$|x| \leq M_1 \quad \text{und} \quad |y| \leq M_2$$

auf Orbits in  $S$  gilt. Für  $M \geq M_1 + M_2$  erhalten wir daraus

$$|z| \leq |x| + |y| \leq M_1 + M_2 \leq M$$

für alle Orbits in  $S$ . ■

**Bemerkung C.1.3.**

Falls  $a < 0$  gilt, so funktioniert der Beweis mit kleinen Modifikationen im 2. Schritt ebenso. Wir geben die angepassten Teilschritte an.

**Teilschritt 3.B':** *Abschätzung für  $\vartheta'$ .*

Gelten  $mv \leq j$  und  $|x| \geq K$  (wobei  $K$  im Sinne des 2. Schrittes hinreichend groß sei), so finden wir Zahlen  $\alpha > 0$  und  $c_3 > 0$ , sodass innerhalb des Kegels

$$\{x : |\vartheta| \leq \alpha\}$$

die Ungleichung

$$\vartheta' \leq c_3 > 0 \quad (\text{C.7})$$

gilt.

*Begründung:* Auf dem Intervall  $[0, \pi/2]$  ist die Sinus-Funktion streng monoton wachsend und die Cosinus-Funktion ist streng monoton fallend. Für  $0 < \alpha < \pi/2$  folgt aus

$$-\alpha \leq \vartheta \leq \alpha,$$

dass

$$-\sin \alpha \leq \sin \vartheta \leq \sin \alpha$$

und

$$1 \geq \cos \vartheta \geq \cos \alpha$$

gelten. Daher folgt

$$\vartheta' \stackrel{(*)'}{\geq} -\frac{a}{\eta} \cos^2 \alpha - \left| \frac{v}{\eta} - \frac{m}{v} \right| \sin \alpha + \frac{a}{v} \sin^2 \alpha + \frac{c}{|x|\eta} \cos \alpha$$

Weil die rechte Seite der letzten Zeile stetig in  $\alpha$  und strikt größer als 0 für  $\alpha = 0$  ist, können wir ein  $c_3$  finden, sodass  $\vartheta' \leq c_3 > 0$  erfüllt ist, falls  $\alpha$  klein genug ist.

**Teilschritt 3.C':** Die Ungleichung  $(*)'$ .

Sei  $F = \left( \frac{v}{\eta} - \frac{m}{v} \right)$ . Wenn  $F = 0$  ist, so ist die Behauptung trivial. Andernfalls unterscheiden wir die zwei Fälle  $F > 0$  und  $F < 0$ :

$F > 0$ : Dann ist  $F = |F|$  und

$$F \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \vartheta \geq F \cdot (-\sin \alpha) \cdot \cos \vartheta \geq -F \sin \alpha.$$

$F < 0$ : Dann ist  $-F = |F|$  und

$$\begin{aligned} F \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \vartheta &= (-F) \cdot (-\sin \vartheta) \cdot \cos \vartheta \\ &\geq (-F \cos \vartheta) \cdot (-\sin \alpha) \geq (-F) \cdot (-\sin \alpha) = F \cdot \sin \alpha. \end{aligned}$$

**Teilschritt 3.D':** Kein vollständiger Orbit verbleibt innerhalb des Kegels.

Offensichtlich gilt für  $\vartheta = \pi/2 \pmod{\pi}$ :  $\vartheta' < 0$  (anhand der Gleichung gilt für solche  $\vartheta$  nämlich  $\vartheta' = a/v < 0$  wegen  $a < 0$ ).

Jedes Orbitsegment, längs welchem  $|x| \geq K$  und  $mv \leq j$  gilt, verläuft entweder ganz außerhalb des Kegels oder verbleibt für eine gewisse Zeit innerhalb des Kegels, die unabhängig von seiner Länge beschränkt ist: Für einen Orbit, der innerhalb des Kegels startet, gilt  $\vartheta - \vartheta_0 \geq c_3 t$  (wegen  $\vartheta' \geq c_3$ ), also

$$t \leq \frac{\vartheta - \vartheta_0}{c_3} \leq \frac{2\alpha}{c_3}.$$

Ein Orbit, der den Kegel verlassen hat, kann nicht wieder in den Kegel gelangen. Denn: Entlang  $\vartheta = \alpha$  gilt  $\vartheta' > 0$  und entlang  $\vartheta = 3\pi/2$  gilt  $\vartheta' < 0$ , d.h. Orbits verbleiben im I. Quadranten der  $w_1 - b_1$ -Ebene zwischen der positive  $b_1$ -Achse und der Geraden  $\vartheta = \alpha$ , wenn sie zu irgendeiner Zeit in diesem Bereich sind.  $\diamond$

## C.2 Isolierte Invarianz von $S$

### Satz C.2.1.

Für fest gewählte Parameter  $(\delta, j, c)$  ist  $S = S(j) \supset R$  eine isolierte invariante Menge und für jedes beliebige kompakte Intervall  $J \subset (-\infty, +\infty)$  ist

$$\{S(j)\}_{j \in J}$$

eine stetige Familie.

**BEWEIS. 1. SCHRITT: Vorbereitung.**

Die Parameter  $(\delta, j, c)$  seien fixiert.  $S$  ist eine (nach 4.6.1) beschränkte und (als Vereinigung von vollständigen Orbits) invariante Menge. Wenn die Abgeschlossenheit von  $S$  gezeigt ist, so folgt Kompaktheit und  $S$  ist dann eine isolierte invariante Menge, wobei jede beschränkte Umgebung von  $S$  als isolierende Umgebung dient.

**2. SCHRITT:  $S$  besitzt keinen Häufungspunkt in der Menge  $\{v = 0\}$ .**

Angenommen, es gibt einen Häufungspunkt in  $\{v = 0\}$ . Dann existiert eine Folge  $(\tilde{\mathbf{u}}_n) \subset S$  derart, dass die Folge der  $v$ -Komponenten von  $\tilde{\mathbf{u}}_n$  gegen 0 konvergiert. Da diese Punkte auf Orbits in  $S$  liegen, können wir dann sogar eine Folge  $(\mathbf{u}_n) \subset S$  finden, deren Folgenglieder außerdem

$$v'_n = 0$$

erfüllen.

Die Folge  $(\mathbf{u}_n)$  gewinnen wir mithilfe der Folge  $(\tilde{\mathbf{u}}_n)$  so: Zu jedem  $n$  betrachte den Orbit mit  $\tilde{\mathbf{u}}_n \in \gamma_n$  und wähle ein solches  $\mathbf{u}_n \in \gamma_n$ , dass  $v_n = \min_{\gamma} v$  gilt. Dann gelten

$$v'_n = 0 \quad \text{und} \quad 0 < v_n \leq \tilde{v}_n \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty.$$

Daraus folgt für  $\mathbf{u}_n$  (gemäß der Differentialgleichung):

$$0 = \frac{1}{2} (x_2^2 + y_2^2) - j + m v_n + p(v_n)$$

Entlang dieser Folge gilt aber (gemäß der Eigenschaften von  $p$ )  $p(v_n) \rightarrow \infty$  und die übrigen Summanden sind nach Lemma C.1.2 beschränkt. **WIDERSPRUCH.**

**3. SCHRITT:  $S$  ist abgeschlossen.**

Um die Abgeschlossenheit von  $S$  nachzuweisen, betrachten wir eine konvergente Folge  $\mathbf{u}_n \rightarrow \mathbf{u}$  von Zuständen mit  $\mathbf{u}_n \in S$ .  $\gamma_n$  und  $\gamma$  bezeichnen die Orbits durch  $\mathbf{u}_n$  bzw.  $\mathbf{u}$ .

Nichtkonstante Orbits in  $S$  sind stets heterokline Orbits (weil eine Lyapunov-Funktion existiert und diese Orbits vollständig sind). Es sei

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \gamma_n(t) = \gamma_n^\pm.$$

Aufgrund der stetigen Abhängigkeit von den Anfangswerten gilt eine Abschätzung von der Art

$$|\gamma(t) - \gamma_n(t)| \leq |u - u_n| e^{L|t|}$$

für alle  $n$  und für jedes  $t$  mit einer geeigneten Konstanten  $L > 0$ .

Wegen dieser Ungleichung muss auch  $\gamma$  ein vollständiger Orbit sein, denn  $\gamma_n$  ist vollständig und die rechte Seite lässt sich durch Vergrößern von  $n$  beliebig verkleinern.

Angenommen,  $\gamma$  wäre nicht beschränkt für positive Zeiten, d.h. es gibt eine Folge  $t_k \rightarrow \infty$ , sodass  $|\gamma(t_k)| \geq k$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  ist. Mithilfe der Ungleichung folgt daraus

$$k \leq |\gamma(t_k)| \leq |\gamma_n(t_k)| + |\mathbf{u} - \mathbf{u}_n| e^{Lt_k} \quad (\text{C.8})$$

für alle  $k$ . Diese Ungleichung wird sicherlich falsch, wenn man  $n$  genügend vergrößert; genauer gilt: Die Orbits  $\gamma_n$  sind sämtlich in der beschränkten Menge  $S$  enthalten, also gibt es nach C.1.2 eine Zahl  $M > 0$ , sodass

$$|\gamma_n| \leq M$$

für alle  $n$  gilt. Wähle  $k > M + 1$ . Aufgrund der Konvergenz von  $(\mathbf{u}_n)$  finden wir ein  $N \in \mathbb{N}$ , sodass

$$|\mathbf{u} - \mathbf{u}_n| < \frac{1}{2} e^{-Lt_k}$$

für alle  $n \geq N$  gilt. Aus der Ungleichung (C.8) folgt auf diese Weise der WIDERSPRUCH

$$M + 1 < k \leq M + \frac{1}{2} e^{-Lt_k} \cdot e^{Lt_k} = M + \frac{1}{2}.$$

Somit ist die Beschränktheit des Orbits  $\gamma$  nachgewiesen und wir haben gezeigt, dass  $\mathbf{u} \in \gamma$  ein Punkt eines vollständigen beschränkten Orbits ist. Nach dem 2. Schritt besitzt  $S$  keinen Häufungspunkt in der Menge  $\{v = 0\}$ , deshalb muss es eine Konstante  $\tilde{c} > 0$  geben, mit welcher bei jedem Punkt  $\tilde{\mathbf{u}} \in \gamma$

$$\tilde{v} > c$$

gilt.

Falls es solch eine Konstante  $\tilde{c}$  nicht gäbe, so müsste  $\gamma$  aufgrund der Abgeschlossenheit sogar einen Punkt  $\tilde{\mathbf{u}} \in \gamma$  mit  $\tilde{v} = 0$  enthalten, und dann gibt es offenbar auch eine gegen  $\tilde{\mathbf{u}}$  konvergente Folge  $(\tilde{\mathbf{u}}_n)$  von Punkten auf  $\gamma_n$ . Somit hätte  $S$  einen Häufungspunkt in der Menge  $\{v = 0\}$  – im WIDERSPRUCH zum 2. Schritt.

Der Punkt  $\mathbf{u}$  liegt deshalb auf einem vollständigen beschränkten Orbit  $\gamma$ , welcher ganz in  $\{v > 0\}$  verläuft; d.h.  $\mathbf{u} \in S$ .



Wir haben also gezeigt, dass alle Häufungspunkte (mithin alle Randpunkte) bereits in  $S$  liegen, d.h.  $S$  ist abgeschlossen. Insgesamt haben wir gezeigt, dass  $S$  kompakt ist.

**4. SCHRITT:** *Isolierte Invarianz von  $S$ .*

Nach Konstruktion von  $S$  ist diese Menge die (bezüglich der Inklusion) größte beschränkte invariante Menge. Sei  $N$  eine beschränkte Umgebung von  $S$ , d.h.  $\text{cl}(N)$  ist kompakt und  $S \subset \text{int } N$ . Dann gilt:  $N$  ist eine isolierende Umgebung für  $S$  und  $S$  die maximale invariante Menge in  $N$ , d.h.  $S$  ist eine isolierte invariante Menge.

**5. SCHRITT:**  $\{S(j) : j \in J\}$  ist eine stetige Familie.

Gemäß dem 4. Schritt ist bekannt, dass  $S(j)$  für jedes  $j \in \mathbb{R}$  eine isolierte invariante Menge ist, also existiert insbesondere ein  $r(j) > 0$  mit

$$S(j) \subset B_{r(j)}.$$

Aufgrund der stetigen Abhängigkeit der Lösungen einer Differentialgleichung von den Parametern (in diesem Fall von  $j$ ) gilt auch für Parameter  $\tilde{j}$  in einer Umgebung

$$U(j) = (j - \varepsilon, j + \varepsilon)$$

von  $j$  (mit einem genügend kleinen  $\varepsilon > 0$ ) die Inklusion

$$S(\tilde{j}) \subset B_{r(j)}.$$

Die Familie

$$\{U(j) : j \in J\}$$

bildet eine offene Überdeckung der kompakten Menge  $J$ , daher existiert eine endliche Teilüberdeckung, d.h. es gibt ein  $n \in \mathbb{N}$  und  $j_1, \dots, j_n \in J$ , sodass

$$\{U(j_\alpha) : \alpha \in \{1, \dots, n\}\}$$

eine endliche offene Überdeckung von  $J$  ist.

Mit der Bezeichnung

$$r := \max_{1 \leq \alpha \leq n} r(j_\alpha)$$

gilt nun für jedes  $j \in J$

$$S(j) \subset B_r.$$

Die vorstehende Überlegung zeigt, dass die beschränkte Umgebung  $N := B_r$  für jede der Mengen  $S(j)$  mit  $j \in J$  als isolierende Umgebung dient. ■

## D Symbolerläuterung

$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen
$\mathbb{Z}$	Menge der ganzen Zahlen
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen
$\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^n v_i w_i$	Euklidisches Skalarprodukt der Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^n$
$ v  = \sqrt{\langle v, v \rangle}$	Euklidische Norm des Vektors $v \in \mathbb{R}^n$
$\partial U$	topologischer Rand der Menge $U$
$\text{cl}(U) = U \cup \partial U$	topologischer Abschluss der Menge $U$
$\text{int } U$	Menge der inneren Punkte der Menge $U$
$\bar{0}$	Homotopie-Klasse des einpunktigen punktierten Raumes $\{*\}/\{*\}$
$\Sigma^k$	Homotopie-Klasse der punktierten $k$ -Sphäre $(S^k, *)$

## Verwendete technische Hilfsmittel

Im Sinne der Vollständigkeit und der Nachvollziehbarkeit seien an dieser Stelle die benutzten technischen Hilfsmittel erwähnt, die bei der Erstellung der vorliegenden Diplomarbeit zum Einsatz gekommen sind.

Der vorliegende Text wurde mit dem Textsatzprogrammpaket  $\text{\LaTeX}$  mithilfe der KOMA-Script-Klasse<sup>1</sup> erstellt.

Außerdem wurden die folgende Pakete verwendet: `amsmath`, `amssymb`, `bibgerm`, `BIBTeX`, `caption`, `courier`, `geralpha`, `mathpazo`, `ntheorem`, `pst-all`.

Für die Berechnung der heteroklinen Orbits habe ich das freie Programm `XPPAUT`<sup>2</sup> (in der Version 5.98) benutzt. Die Abbildungen wurden mit dem Paket `PSTricks` erzeugt und eingebunden.

---

<sup>1</sup>Erhältlich unter der Internetadresse:

[www.ctan.org/tex-archive/macros/latex/contrib/koma-script/](http://www.ctan.org/tex-archive/macros/latex/contrib/koma-script/)

<sup>2</sup>Erhältlich unter der Internetadresse:

<http://www.math.pitt.edu/~bard/xpp/xpp.html>

# Zusammenfassung

## 1. Bezeichnungen und Aufgabenstellung

Unter einem *viskosen Profil* einer Schockwelle der isothermen Magnetohydrodynamik (IMHD) versteht man einen heteroklinen Orbit des folgenden Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned}\mu v' &= mv + p(v) + \frac{1}{2} |\mathbf{b}|^2 - j, \\ \nu \mathbf{w}' &= m\mathbf{w} - a\mathbf{b}, \\ \eta \mathbf{b}' &= v\mathbf{b} - a\mathbf{w} - \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{\Sigma^5}$$

Dabei bezeichnen  $v$  bzw.  $\mathbf{w} = (w_1, w_2)^\top$  die longitudinale bzw. transversale Komponente der Geschwindigkeit des Fluids,  $p = p(v)$  den Druck und  $a = \text{const}$  bzw.  $\mathbf{b} = (b_1, b_2)^\top$  die longitudinale bzw. transversale Komponente der magnetischen Induktivität; die gesuchten Größen werden in dem Vektor  $\mathbf{u} := (v, w_1, w_2, b_1, b_2)$  zusammengefasst. Ferner bedeuten  $\mu - \nu > 0$  bzw.  $\nu > 0$  die longitudinale bzw. transversale Viskosität und  $\eta > 0$  die elektrische Resistivität des Fluids und  $m > 0$ .  $j \in \mathbb{R}$  und  $c \in (0, \infty)$  sind gegebene Konstanten.

Ein viskoses Profil heißt *koplanar*, falls  $w_2(x) = b_2(x) = 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  gilt.

Mit diesen Bezeichnungen lässt sich die Aufgabenstellung in Form zweier Fragen präzise formulieren:

Welche Ruhelagen besitzt das System  $(\Sigma^5)$  zu gegebenen Parametern  $(j, c) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ ?

Welche heteroklinen Orbits treten in Abhängigkeit von  $(\mu, \nu, \eta) \in (0, \infty)^3$  auf?

## 2. Erzielte Ergebnisse

### A. Elementare Analyse von $(\Sigma^5)$

- $(\Sigma^5)$  ist ein gradientenartiges System bezüglich des verallgemeinerten Potentials

$$P(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}m|\mathbf{w}|^2 + \frac{1}{2}v|\mathbf{b}|^2 + q(v) - jv - a\langle \mathbf{b}, \mathbf{w} \rangle - \langle (c, 0)^\top, \mathbf{b} \rangle.$$

- Es gibt eine unbeschränkte, offene Menge von Parametern  $(j, c)$ , sodass  $(\Sigma^5)$  genau vier Ruhelagen  $\mathbf{u}_i$  ( $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ ) besitzt (unabhängig von  $(\mu, \nu, \eta)$ ).

### B. Diskussion singulärer Spezialfälle

Der Fall  $\nu = 0$ :

- Die Dynamik ist auf eine zweidimensionale Ebene eingeschränkt.

- Der schnelle und langsame Schock besitzen unabhängig von  $\mu$  und  $\eta$  koplana-re Profile und es existiert ein  $\omega^*$ , mit welchem für das Verhältnis  $\omega := \frac{\eta}{\mu}$  gilt:
  - Ist  $\omega < \omega^*$ , so besitzt kein intermediärer Schock ein Profil.
  - Ist  $\omega = \omega^*$ , so besitzt nur der intermediäre Schock  $\mathbf{u}_1 \rightarrow \mathbf{u}_2$  ein Profil.
  - Ist  $\omega > \omega^*$ , so besitzt jeder intermediäre Schock außer  $\mathbf{u}_1 \rightarrow \mathbf{u}_2$  ein Profil.
- Der Orbit  $\mathbf{u}_1 \rightarrow \mathbf{u}_2$  ist in den nichtkonstanten Komponenten  $v$ ,  $w_1$  und  $b_1$  mono-ton.
- Für  $\mu \rightarrow 0$  können Subschocks der Art  $\mathbf{u}_0 \rightarrow \mathbf{u}_1$ ,  $\mathbf{u}_0 \rightarrow \mathbf{u}_2$ ,  $\mathbf{u}_0 \rightarrow \mathbf{u}_3$ ,  $\mathbf{u}_1 \rightarrow \mathbf{u}_3$  oder  $\mathbf{u}_2 \rightarrow \mathbf{u}_3$  auftreten, je nach Vorzeichen des Ausdrucks  $m + p'(v_i)$  für  $i \in \{1, 2\}$ , welches einer einfachen physikalischen Bedingung an die Ruhelagen entspricht, nämlich:  $\text{sign}(m + p'(v_i)) > 0 \iff v_i > c_s$ .

Der Fall  $\eta = 0$ :

- Der schnelle und langsame Schock besitzen unabhängig von  $\mu$  und  $v$  koplanare Profile und es existiert ein  $\omega^*$ , mit welchem für das Verhältnis  $\omega := \frac{v}{\mu}$  gilt:
  - Ist  $\omega < \omega^*$ , so besitzt kein intermediärer Schock ein Profil.
  - Ist  $\omega = \omega^*$ , so besitzt nur der intermediäre Schock  $\mathbf{u}_1 \rightarrow \mathbf{u}_2$  ein Profil.
  - Ist  $\omega > \omega^*$ , so besitzt jeder intermediäre Schock außer  $\mathbf{u}_1 \rightarrow \mathbf{u}_2$  ein Profil.

Der Fall  $\mu \rightarrow \infty$ :

- Es existieren ausschließlich die langsamen Orbits  $\mathbf{u}_0 \rightarrow \mathbf{u}_1$  und  $\mathbf{u}_2 \rightarrow \mathbf{u}_3$  und keine singulären Orbits.

Der Fall  $v \rightarrow \infty$ :

- Es existieren ausschließlich die langsamen Orbits  $\mathbf{u}_0 \rightarrow \mathbf{u}_2$  und  $\mathbf{u}_1 \rightarrow \mathbf{u}_3$  sowie die singulären Orbits  $\mathbf{u}_0 \rightarrow \mathbf{u}_1$ ,  $\mathbf{u}_0 \rightarrow \mathbf{u}_3$  und  $\mathbf{u}_2 \rightarrow \mathbf{u}_3$ .

Der Fall  $\eta \rightarrow \infty$ :

- In Abhängigkeit vom Vorzeichen von  $m + p'(v_i)$  gibt es genau einen der *langsamen* Orbits  $\mathbf{u}_0 \rightarrow \mathbf{u}_1$  bzw.  $\mathbf{u}_0 \rightarrow \mathbf{u}_2$  und genau einen der *langsamen* Orbits  $\mathbf{u}_1 \rightarrow \mathbf{u}_3$  bzw.  $\mathbf{u}_2 \rightarrow \mathbf{u}_3$ .

### C. Existenz viskoser Profile

- Die Schocks  $\mathbf{u}_0 \rightarrow \mathbf{u}_1$  und  $\mathbf{u}_2 \rightarrow \mathbf{u}_3$  besitzen für jede Wahl  $(\mu, v, \eta) \in (0, \infty)^3$  Profile (Beweis unter Verwendung der Conley-Index-Theorie).
- Der schnelle Schock  $\mathbf{u}_0 \rightarrow \mathbf{u}_1$  besitzt für jede Wahl  $(\mu, v, \eta) \in (0, \infty)^3$  ein eindeutig bestimmtes koplanares Profil (Beweis unter Verwendung einer Phasenportrait-Analyse).
- Falls  $c = 0$  gilt, so besitzen alle Schockwellen außer  $\mathbf{u}_1 \rightarrow \mathbf{u}_2$  ein Profil.
- Die Beschreibung der globalen Bifurkation für  $v = 0$  [bzw.  $\eta = 0$ ] überträgt sich auf solche Parameter  $(\mu, v, \eta)$  mit  $0 < v \ll \min\{\mu, \eta\}$  [bzw.  $0 < \eta \ll \min\{\mu, v\}$ ] (Beweis mithilfe singulärer Störungstheorie).

## Literaturverzeichnis

- [Cab70] CABANNES, HENRI: *Theoretical Magnetofluidynamics*. Academic Press, New York, 1970.
- [Con78] CONLEY, CHARLES C.: *Isolated invariant sets and the Morse index*, Band 38 der Reihe *CBMS Regional Conference Series in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1978.
- [CS74] CONLEY, CHARLES C. und JOEL A. SMOLLER: *On the structure of magnetohydrodynamic shock waves*. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 27:367–375, 1974.
- [CS75] CONLEY, CHARLES C. und JOEL A. SMOLLER: *On the structure of magnetohydrodynamic shock waves, II*. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées. Neuvième Série*, 54:429–443, 1975.
- [Fen72] FENICHEL, NEIL: *Persistence and smoothness of invariant manifolds for flows*. *Indiana University Mathematics Journal*, 21:193–226, 1971/1972.
- [Fen79] FENICHEL, NEIL: *Geometric singular perturbation theory for ordinary differential equations*. *Journal of Differential Equations*, 31(1):53–98, 1979.
- [FM98] FRANZOSA, ROBERT und KONSTANTIN MISCHAIKOW: *Algebraic transition matrices in the Conley index theory*. *Transactions of the American Mathematical Society*, 350(3):889–912, 1998.
- [Fra89] FRANZOSA, ROBERT: *The Connection Matrix Theory for Morse Decompositions*. *Transactions of the American Mathematical Society*, 311:561–592, 1989.
- [FS95] FREISTÜHLER, HEINRICH und PETER SZMOLYAN: *Existence and bifurcation of viscous profiles for all intermediate magnetohydrodynamic shock waves*. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 26(1):112–128, 1995.
- [Ger59] GERMAIN, PAUL: *Contribution à la théorie des ondes de choc en magnétodynamique des fluides*. O. N. E. R. A. Publ., No. 97:33 S., 1959.
- [GH90] GUCKENHEIMER, JOHN und PHILIP HOLMES: *Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields*, Band 42 der Reihe *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 1990.
- [Gil51] GILBARG, DAVID: *The existence and limit behavior of the one-dimensional shock layer*. *American Journal of Mathematics*, 73:256–274, 1951.

- [Hes84] HESAARAKI, MAHMUD: *The structure of shock waves in magnetohydrodynamics*. Memoirs of the American Mathematical Society, 49, number 302 (fourth of 5 numbers), 1984.
- [HM90] HATTORI, HARUMI und KONSTANTIN MISCHAIKOW: *On the existence of intermediate magnetohydrodynamic shock waves*. Journal of Dynamics and Differential Equations, 2(2):163–175, 1990.
- [Jän05] JÄNICH, KLAUS: *Topologie*. Springer-Verlag, Berlin, 8. Auflage, 2005.
- [Jon95] JONES, CHRISTOPHER K. R. T.: *Geometric singular perturbation theory*. In: *Dynamical systems (Montecatini Terme, 1994)*, Band 1609 der Reihe *Lecture Notes in Math.*, Seiten 44–118. Springer, Berlin, 1995.
- [KL65] KULIKOVSKIY, ANDREI G. und GRIGORII A. LYUBIMOV: *Magnetohydrodynamics*. Addison-Wesley Publishing Company, Reading, 1965.
- [Mun84] MUNKRES, JAMES R.: *Elements of algebraic topology*. Addison-Wesley Publishing Company, Menlo Park, 1984.
- [Smo94] SMOLLER, JOEL A.: *Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations*. Springer-Verlag, New York, 2. Auflage, 1994.
- [Szm89] SZMOLYAN, PETER: *Heteroclinic Orbits In Singularly Perturbed Differential Equations*. IMA Preprint Series, Nr. 576:24 S., 1989.
- [Szm91] SZMOLYAN, PETER: *Transversal Heteroclinic and Homoclinic Orbits in Singular Perturbation Problems*. Journal of Differential Equations, 92:252–281, 1991.
- [Tes09] TESCHL, GERALD: *Ordinary Differential Equations and Dynamical Systems*, 2009. <http://www.mat.univie.ac.at/~gerald/ftp/book-ode/index.html>.
- [Wey49] WEYL, HERMANN: *Shock waves in arbitrary fluids*. Communications on Pure and Applied Mathematics, 2:103–122, 1949.

## Ehrenerklärung

Ich versichere, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und nur unter Verwendung der angegebenen Quellen und Hilfsmittel angefertigt habe, insbesondere sind wörtliche oder sinngemäße Zitate als solche gekennzeichnet.

Mir ist bekannt, dass Zuwiderhandlung auch nachträglich zur Aberkennung des Abschlusses führen kann.

Ort, Datum

Unterschrift