Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Dr. Andreas Klaiber

Variationsrechnung
Präsenzübung (Mittwoch, 20.04.16)

1. Aufgabe (a) Beweisen Sie das „Fundamentallemma der Variationsrechnung“ in folgender Form: *Erfüllt* $f \in C^0([x_0, x_1])$ *die Gleichung*

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = 0 \qquad \textit{für alle } \varphi \in C_0^2([x_0,x_1]) := C^2([x_0,x_1]) \cap \{w : w(x_0) = w(x_1) = 0\},$$

dann gilt $f(x) = 0$ *für alle* $x \in [x_0, x_1]$.

(b) Sei $L \in C^2([x_0, x_1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ und $u \in C^2([x_0, x_1])$ ein Minimierer des Funktionals

$$I[w] := \int_{x_0}^{x_1} L(x, w(x), w'(x))\,\mathrm{d}x$$

auf der Menge $\mathcal{A} := \{w \in C^2([x_0, x_1]) : w(x_0) = y_0, w(x_1) = y_1\}$. Zeigen Sie, dass u eine Lösung der Euler-Lagrange-Gleichung

$$L_z(x, w(x), w'(x)) - \frac{d}{dx} L_p(x, w(x), w'(x)) = 0$$

ist.

Hinweis: Bestimmen Sie (wie in der Vorlesung) die erste Variation von I in Richtung $\varphi \in C_0^2([x_0, x_1])$. Die Voraussetzungen implizieren, dass man dann (a) anwenden kann, um die Euler-Lagrange-Gleichung zu erhalten.

2. Aufgabe (a) Angenommen, $L = L(x, p)$ hängt nicht von z ab. Zeigen Sie, dass Lösungen der Euler-Lagrange-Gleichung eine gewöhnliche Differentialgleichung 1. Ordnung erfüllen.

(b) Angenommen, $L = L(z, p)$ hängt nicht von x ab. Zeigen Sie, dass Lösungen der Euler-Lagrange-Gleichung eine gewöhnliche Differentialgleichung 1. Ordnung erfüllen.

Hinweis: Zeigen Sie, dass $u'(x)L_p(u(x), u'(x)) - L(u(x), u'(x)) = \text{const}$ gilt, wenn u eine Lösung der Euler-Lagrange-Gleichung ist.

3. Aufgabe Bestimmen Sie die Euler-Lagrange-Gleichungen für folgende Probleme:

$$I_1[w] := \int_1^2 \frac{(w')^2}{x^3}\,\mathrm{d}x, \qquad I_2[w] := \int_0^b w\sqrt{1 + (w')^2}\,\mathrm{d}x.$$

4. Aufgabe Zeigen oder widerlegen Sie: Mit

$$I[w] := \int_{-1}^{1} x^4 (w')^2 \, \mathrm{d}x \quad \text{und} \quad \mathcal{A} := \{w \in C^2([-1,1]) : w(-1) = -1, w(1) = 1\}$$

gilt $\min_{w \in \mathcal{A}} I[w] = 0$.

5. Aufgabe Finden Sie eine Lagrange-Funktion $L = L(x_1, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n)$, sodass die partielle Differentialgleichung

$$-\Delta u + \nabla \phi \cdot \nabla u = f$$

sich als Euler-Lagrange-Gleichung zu $I[w] = \int_U L(x, w(x), \nabla w(x)) \, \mathrm{d}x$ auffassen lässt. Hier ist die Funktion $u : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gesucht und $f, \phi : U \to \mathbb{R}$ sind gegebene Funktionen.
Hinweis: Betrachten Sie zunächst $n = 1$ und bringen Sie die Gleichung auf die Form $-(A(x) u_{x_1})_{x_1} = B(x)$ mit geeigneten Funktionen A, B. Finden Sie für diese Formulierung eine Lagrange-Funktion.

6. Aufgabe Bestimmen Sie die Euler-Lagrange-Gleichung (die sogenannte *Minimalflächengleichung*) zu

$$I[w] := \int_U \sqrt{1 + |\nabla w|^2} \, \mathrm{d}x.$$