Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Dr. Andreas Klaiber

Variationsrechnung
Serie 1

1. Aufgabe (4 Punkte) Zeigen Sie, dass

$$I[w] := \int_{-1}^{1} w(x)^2(2x - w'(x))^2 \mathrm{d}x \quad \text{in } \mathcal{A} := \{w \in C^1([-1,1]) : w(-1) = 0, w(1) = 1\}$$

genau einen Minimierer $u \in \mathcal{A}$ besitzt. Zeigen Sie weiter, dass u die Euler-Lagrange-Gleichung erfüllt, aber $u \notin C^2([-1,1])$ ist.

2. Aufgabe (4 Punkte) Betrachten Sie das Funktional für $A < 0 < a$:

$$I[w] := \int_{a}^{1} \sqrt{\frac{1 + w'(x)^2}{-w(x)}} \mathrm{d}x \quad \text{für } w \in C^1([a,1]) \text{ mit } w < 0, w(a) = A.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Lagrange-Funktion $L(x,z,p)$ nicht konvex bezüglich $(z,p) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}$ ist.
(b) Zeigen Sie, dass die Variablentransformation $v := \sqrt{-2w}$ zu einer Lagrange-Funktion $\tilde{L}(x,z,p)$ führt, die strikt konvex bezüglich $(z,p) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}$ ist.
Bemerkung: Auf diese Weise kann man zeigen, dass die Brachistochrone eindeutiger Minimierer der Laufzeit ist.

3. Aufgabe (4 Punkte) (a) Zeigen Sie, dass das Funktional

$$I[w] := \int_{a}^{b} w'(x)^2 \, \mathrm{d}x \quad \text{auf } \mathcal{A} := \{w \in C^1([a,b]) : w(a) = A, w(b) = B\}$$

einen eindeutig bestimmten globalen Minimierer besitzt.
(b) Zeigen Sie, dass das Funktional

$$I[w] := \int_{0}^{1} w'(x)^3 \, \mathrm{d}x \quad \text{auf } \mathcal{A} := \{w \in C^1([0,1]) : w(0) = w(1) = 0\}$$

weder Minimierer noch Maximierer (d. h. Minimierer von $-I$) besitzt. Wieviele Extremalen gibt es?

4. Aufgabe (4 Punkte) Betrachten Sie

$$I[w] := \int_{-1}^{1} x^2(w'(x))^2 + x(w'(x))^3 \mathrm{d}x \quad \text{auf } \mathcal{A} := \{w \in C^1([-1,1]) : w(-1) = 0, w(1) = 0\}$$

und zeigen Sie:
(i) $u \equiv 0$ ist Extremale von I.
(ii) $\delta^2 I[u]\varphi > 0$ für alle $\varphi \in C_0^1([a,b]) \setminus \{0\}$.
(iii) u ist kein Minimierer von I in $\mathcal{A}$.
Hinweis: Finden Sie in (iii) eine geeignete stückweise lineare Funktion v mit $I[v] < I[u]$.

Abgabe der Lösungen: 04.05.2016, 11:45 Uhr zu Übungsbeginn.