Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Dr. Andreas Klaiber

Variationsrechnung
Serie 2

5. Aufgabe (4 Punkte) Zeigen Sie:

(a) Die Jacobi-Hilfsgleichung geht aus der Euler-Lagrange-Gleichung durch Linearisierung um eine Extremale u hervor.

(b) Ist $u(x; c_1, c_2)$ die allgemeine Lösung der Euler-Lagrange-Gleichung, dann erfüllen $\frac{\partial u}{\partial c_1}$ und $\frac{\partial u}{\partial c_2}$ die Jacobi-Hilfsgleichung.

(c) Die Jacobi-Hilfsgleichung ist selbst die Euler-Lagrange-Gleichung eines geeigneten (welchen?) Funktionals.

6. Aufgabe (4 Punkte) Berechnen Sie für das Funktional

$$I[w] = \int_1^2 w'(x)(1 + x^2 w'(x))\,\mathrm{d}x \quad \text{auf } \mathcal{A} := \{w \in C^1([1,2]) : w(1) = A, w(2) = B\}$$

sämtliche Extremalen und bestimmen Sie deren Typ, indem Sie alle konjugierten Punkte finden.

8. Aufgabe (4 Punkte) (i) Zeigen Sie: *Ist u ein Minimierer von*

$$I[w] := \int_a^b L(x, w(x), w'(x))\,\mathrm{d}x \quad \textit{auf } \mathcal{A} := C^2([a,b]),$$

wobei $L \in C^2([a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$, dann erfüllt u (neben der Euler-Lagrange-Gleichung) die natürlichen Randbedingungen

$$L_p(a, u(a), u'(a)) = L_p(b, u(b), u'(b)) = 0.$$

Hinweis: Da hier keine Randbedingungen vorliegen, muss $\delta I[u]\varphi = 0$ sogar für alle $\varphi \in C^\infty([a,b])$ (ohne Nullrandwerte) gelten. Aus dieser Forderung folgt mittels partieller Integration und durch geschickte Wahl von φ die Behauptung (vgl. mit der Herleitung der Euler-Lagrange-Gleichung in Abschnitt 1.2(d)).

(ii) Besitzt das Funktional

$$I[w] := \int_0^1 (w')^2 + \arctan(w)\,\mathrm{d}x$$

lokale oder globale Minimierer in $C^1([0,1])$? Ist das Funktional nach unten beschränkt?

Abgabe der Lösungen: Spätestens am 18.05.2016, 11:45 Uhr zu Übungsbeginn.
Wer bis 17.05. um 12:00 Uhr in F440 abgibt, bekommt am 18.05. sein korrigiertes Blatt zurück.