Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Dr. Andreas Klaiber

Variationsrechnung
Serie 3

9. Aufgabe (4 Punkte) Betrachten Sie

$$I[w] := \int_0^1 w\sqrt{1+w'(x)^2}\,\mathrm{d}x \quad \text{mit } w(0)=w(1)=1$$

unter der Nebenbedingung

$$J[w] := \int_0^1 \sqrt{1+w'(x)^2}\,\mathrm{d}x = L > 1.$$

(a) Bestimmen Sie sämtliche Extremalen.

(b) Welche Extremalen erfüllen die Legendre-Bedingung?

(c) Gibt es einen Minimierer?

Hinweise: (1) Die allgemeine Lösung der Euler-Lagrange-Gleichung ist von der Form $u(x) = c_1 + c_2\cosh(c_3(x+c_4))$ mit $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$. (2) Unter Verwendung von Aufgabe 5(b) kann man Lösungen der Jacobi-Hilfsgleichung finden und explizit auf konjugierte Punkte untersuchen.

10. Aufgabe (4 Punkte) Zeigen Sie:

(i) Die Folge $u_k(x) := \sin(kx)$ erfüllt $u_k \rightharpoonup 0$ in $L^2(0,1)$ für $k \to \infty$.

(ii) Die Folge

$$u_k(x) := \begin{cases} a & \text{für } \frac{j}{k} \le x < \frac{j+\lambda}{k}, \\ b & \text{für } \frac{j+\lambda}{k} \le x < \frac{j+1}{k}, \end{cases} \quad j \in \{0,\dots,k-1\},$$

wobei $a, b \in \mathbb{R}$, $\lambda \in (0,1)$ gegeben sind, erfüllt $u_k \rightharpoonup \lambda a + (1-\lambda)b$ in $L^2(0,1)$ für $k \to \infty$.

11. Aufgabe (4 Punkte) Geben Sie ein Beispiel für ein Funktional der Form

$$I[w] := \int_U L(x, w(x), Dw(x))\,\mathrm{d}x \quad \text{mit glatter Funktion } L$$

an, welches für kein $q \in (1,\infty)$ schwach folgenstetig auf $W^{1,q}(U)$ ist, d. h.: Es gibt eine Folge $w_k \rightharpoonup w$ in $W^{1,q}(U)$ mit $I[w_k] \not\to I[w]$. (n und $U \subset \mathbb{R}^n$ sind frei wählbar.)

12. Aufgabe (4 Punkte) Zeigen Sie, dass das Funktional

$$I[w] := \int_U \sqrt{w(x)^2 + w'(x)^2}\,\mathrm{d}x \quad \text{auf } \mathcal{A} := \{w \in W^{1,1}(0,1) : w(0)=0, w(1)=1\}$$

keinen Minimierer besitzt. Welche Voraussetzungen von Theorem 3.2 (über die Existenz von Minimierern) sind erfüllt bzw. nicht erfüllt?
Hinweis: Zeigen Sie, dass $\inf\{I[w] : w \in \mathcal{A}\} = 1$ ist, indem Sie eine geeignete minimierende Folge aus stückweise linearen Funktionen konstruieren. Andererseits führt die Annahme, es gäbe einen Minimierer, auf eine Funktion, die mit den Randwerten nicht kompatibel ist.

Abgabe der Lösungen: Spätestens am 01.06.2016, 11:45 Uhr zu Übungsbeginn.
Wer bis 31.05. um 12:00 Uhr in F440 abgibt, bekommt am 01.06. sein korrigiertes Blatt zurück.