Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Dr. Andreas Klaiber

Variationsrechnung

Serie 4

Im Folgenden bezeichnet $U \subset \mathbb{R}^n$ stets eine offene, beschränkte Menge.

13. Aufgabe (4 Punkte) Lässt sich Theorem 3.2 (über die Existenz eines Minimierers) anwenden, um für

$$I[w] := \int_U \sqrt{1 + |Dw|^2}\, \mathrm{d}x \quad \text{auf } \mathcal{A} := \{w \in W^{1,q}(U) : w|_{\partial U} = g\}$$

mit irgendeinem $q \in [1, \infty)$ einen Minimierer zu finden? Geben Sie ggf. an, wo der Beweis scheitert?

14. Aufgabe (4 Punkte) Zeigen Sie anhand der folgenden Schritte, dass das Problem

$$\text{(1)} \qquad \begin{cases} -\nabla \cdot \left(|\nabla u|^{q-2} \nabla u \right) = f & \text{in } U, \\ u = 0 & \text{auf } \partial U, \end{cases}$$

für $q \in [2, \infty)$ eine schwache Lösung $u \in W_0^{1,q}(U)$ besitzt, wobei $f \in L^\infty(U)$ gegeben ist.

(i) Zeigen Sie, dass (1) die Euler-Lagrange-Gleichung des Funktionals $I[w] := \int_U \frac{1}{q} |\nabla w|^q - fw \, \mathrm{d}x$ ist.

(ii) Zeigen Sie, dass I koerziv ist, d. h.: Wenn $\|w\|_{W_0^{1,q}} \to \infty$, dann $I[w] \to \infty$.

(iii) Zeigen Sie, dass I schwach halbstetig von unten ist.

(iv) Beweisen Sie die Existenz eines Minimierers $u \in W_0^{1,q}(U)$ von I.

Hinweise: (ii) Verwenden Sie die Ungleichungen von Poincaré und Hölder, um $I[w]$ nach unten abzuschätzen. (iii) Verwenden Sie die Tatsache, dass die Norm eines Banach-Raums schwach halbstetig von unten ist (Beweis freiwillig als Zusatz). (iv) Orientieren Sie sich am Beweis von Theorem 3.2; gehen Sie von einer minimierenden Folge aus und zeigen Sie – unter Verwendung von (ii), (iii) –, dass diese gegen einen Minimierer $u \in W_0^{1,q}(U)$ konvergiert.

15. Aufgabe (4 Punkte) Angenommen, $u : U \to \mathbb{R}^m$ ist ein glatter Minimierer des Funktionals

$$I[w] := \int_U L(x, w, Dw)\, \mathrm{d}x,$$

wobei $L : U \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m \times n} \to \mathbb{R}$ die Lagrange-Funktion bezeichnet.

(i) Zeigen Sie, dass

$$\text{(2)} \qquad \sum_{i,j=1}^{n} \sum_{k,l=1}^{m} \frac{\partial^2 L}{\partial p_i^k \partial p_j^l}(x, u, Du) \eta_k \eta_l \xi_i \xi_j \geq 0$$

für alle $x \in U$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\eta \in \mathbb{R}^m$ gilt.

(ii) Zeigen Sie, dass $L : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}, P \mapsto \det P$ die Relation (2) erfüllt und nicht konvex ist.

Hinweis: Orientieren Sie sich in (i) an dem Beweis der entsprechenden Aussage für $m = 1$ (siehe 3.1(b)).

Abgabe der Lösungen: Spätestens am 15.06.2016, 11:45 Uhr zu Übungsbeginn.
Wer bis 14.06. um 12:00 Uhr in F440 abgibt, bekommt am 15.06. sein korrigiertes Blatt zurück.