Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Dr. Andreas Klaiber

# Variationsrechnung

## Serie 5

*Im Folgenden bezeichnet $U \subset \mathbb{R}^n$ stets eine offene, beschränkte Menge.*

**16. Aufgabe** (4 Punkte) Wie lautet die Euler-Lagrange-Gleichung zum Funktional

$$I[u] := \frac{1}{2}\int_U 2\mu\,|Eu|^2 + (\kappa - \frac{2}{3}\mu)\,|\mathrm{tr}\,(Eu)|^2 - f(x)u\,\mathrm{d}x,$$

wobei $Eu := \frac{1}{2}(Du + Du^\mathsf{T})$ ist und $\mu, \kappa > 0$ gegebene Konstanten sind? Hier ist $u : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

**17. Aufgabe** (4 Punkte) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$L : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}, \quad P \mapsto \mathrm{tr}\,(P^2) - (\mathrm{tr}\,P)^2,$$

ein Null-Lagrangian ist.

**18. Aufgabe** (4 Punkte) Betrachten Sie das Funktional

$$I[w] := \int_U \frac{1}{2}\,|\nabla w|^2 + \frac{1}{p+1}\,|w|^{p+1} - fw\,\mathrm{d}x, \quad n > 2, \quad p \leq \frac{n+2}{n-2},$$

für gegebenes $f \in L^2(U)$.

(i) Zeigen Sie, dass $I$ einen Minimierer $u \in W_0^{1,2}(U)$ besitzt.

(ii) Bestimmen Sie die zugehörige Euler-Lagrange-Gleichung.

(iii) Als schwache Lösung der Euler-Lagrange-Gleichung erfüllt $u$ die Gleichung

$$\int_U \nabla u \cdot \nabla\varphi + u\,|u|^{p-1}\,\varphi - f\varphi\,\mathrm{d}x = 0 \quad \forall \varphi \in W_0^{1,2}(U).$$

Folgern Sie daraus, dass der Minimierer eindeutig ist.

*Hinweise:* (i) Zeigen Sie, dass $I$ koerziv [d.h. $\|w\|_{W_0^{1,2}(U)} \to \infty \Rightarrow I[w] \to \infty$] und schwach halbstetig von unten ist. Gehen Sie dann von einer minimierenden Folge aus und zeigen Sie, dass diese gegen einen Minimierer konvergiert. Die kompakte Einbettung $W_0^{1,2}(U) \subset L^{p+1}(U)$ ist dabei nützlich. (iii) Nehmen Sie an, es gäbe zwei Minimierer $u_1, u_2$, und setzen Sie $\varphi = u_1 - u_2$ an geeigneter Stelle ein. Die Ungleichung $(s\,|s|^{p-1} - t\,|t|^{p-1})(s-t) \geq 0$ ist nützlich, um auf $u_1 = u_2$ zu schließen.

**Abgabe der Lösungen: Spätestens am 29.06.2016, 11:45 Uhr zu Übungsbeginn.**
Wer bis 28.06. um 12:00 Uhr in F440 abgibt, bekommt am 29.06. sein korrigiertes Blatt zurück.