Skript zur Vorlesung

Nichtlineare elliptische Gleichungen

Wintersemester 2015/2016

Universität Konstanz

Fachbereich Mathematik und Statistik

Stand: 09.02.2016

Inhaltsverzeichnis

Teil I.

Lineare Theorie der schwachen Lösungen

Ziel der Vorlesung ist die Behandlung/Untersuchung von Randwertproblemen für nichtlineare PDEs 2. Ordnung der allgemeinen Form

$$-\nabla\cdot(\mathcal{A}(x,u,\nabla u)) + \Psi(x,u,\nabla u) = f, \quad x \in \Omega, \tag{0.1}$$

wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ eine offene Teilemnenge des $\mathbb{R}^N$ ist, $N \in \mathbb{N}$, und

$$\mathcal{A} : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N, \quad \Psi : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$$

gegebene Funktione sind. Die gesucht Größe ist die Funktion $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$, also eine skalare Funktion. Typische Beispiele für Ω sind

- unbeschränkte Gebiete:
  - $\Omega = \mathbb{R}^N$ - Ganzraum
  - $\Omega = \mathbb{R}^N_+ := \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R}_+$ - Halbraum
  - $\Omega = \mathbb{R}^{N-1} \times [0,1]$ - unendlicher Streifen
  - $\Omega = \mathbb{R}^N \backslash \Omega_0$ mit beschränktem Gebiet Ω_0 - Aussengebiet
- beschränkte Gebiete: einfach oder auch mehrfach zusammenhängend.

Gebiete mit nichtleerem Rand erfodern eine zusätzliche Bedingung für u, d.h. man benötigt noch eine Information über u auf dem Rand. Beispiele hierfür sind z.B. (a) die Werte von u bzw. deren Ableitungen sind bekannt auf dem Rand des Gebietes (b) u genügt einer Gleichung auf dem Rand. Für unbeschränkte Gebiete wird das Verhalten der Unbekannten im „Unendlichen“ vorgeschieben, z.B. $\lim_{|x|\to\infty} u(x) = 0$.

Klassische Beispiele für (0.1) sind

$$-\Delta u = f, \quad x \in \Omega \quad \text{(Poisson-Gleichung)}$$

und

$$-\nabla\cdot(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = f, \quad x \in \Omega \quad \text{(p-Laplace Gleichung).}$$

Kapitel 1

Hilfsmittel

1.1. Testfunktionen und Distributionen

In diesem Abschnitt bezeichnet Ω stets eine offene nichtleere zusammenhängende Teilmenge des $\mathbb{R}^N$,$N \geq 1$. Einführung eines geeigneten Raum von Testfunktionen über Ω:

Für $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ bezeichnet $\mathrm{C}_0^k(\Omega)$ die Menge aller k-mal stetig differenzierbaren Funktionen $\phi : \Omega \to \mathbb{R}$ mit kompaktem Träger. Der Träger (support) von ϕ ist definiert als die Menge

$$\operatorname{supp} \phi := \overline{\{x \in \Omega : \phi(x) \neq 0\}}.$$

Definiere weiterhin

$$\mathcal{D}(\Omega) := \mathrm{C}_0^\infty(\Omega),$$

der Raum der Testfunktionen über Ω. Mit der üblichen skalaren Multiplikation und Addition von Funktionen ist $\mathcal{D}(\Omega)$ ein linearer Vektorraum. Leider ist es nicht möglich, auf dem Raum $\mathcal{D}(\Omega)$ (oder auf $\mathrm{C}_0^k(\Omega)$) eine Norm einzuführen, so dass $\mathcal{D}(\Omega)$ vollständig wird (Banachraum).

Es gibt jedoch eine Topologie τ[1] auf $\mathcal{D}(\Omega)$ mit der ein Konvergenzbegriff erklärt werden kann. Wir benötigen im folgenden nur den von τ erzeugten Konvergenzbegriff.

Definition 1.1.1. *Seien $(\phi_n)_{n=1}^\infty \subset \mathcal{D}(\Omega)$, $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Die Folge ϕ_n konvergiert in $\mathcal{D}(\Omega)$ gegen ϕ, wenn gilt:*

(i) es existiert eine kompakte Menge $K \subset \Omega$ mit der Eigenschaft, dass $\operatorname{supp} \phi \subset K$ und $\operatorname{supp} \phi_n \subset K$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

[1] Eine Topologie τ auf einer Menge X ist eine Menge τ von Teilmengen von X, die sog. "offenen Mengen" von X, mit der folgenden Eigenschaft: $\varnothing$, $X \in \tau$, $A \cap B \in \tau$, falls A, $B \in \tau$ und beliebige(!) Vereinigungen $\bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$, falls alle $A_i \in \tau$.

(ii) $D^\alpha \phi_n \to_{n\to\infty} D^\alpha \phi$ *gleichmässig auf* Ω *für alle Multiindices* $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$*.*

Bez. $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$, d.h. $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N)$, $\alpha_i \in \mathbb{N}_0$ für alle $i \in \{1, \ldots, N\}$ und setze $|\alpha| = \sum_i \alpha_i$,

$$D^\alpha \phi(x) := \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \ldots \partial_{x_n}^{\alpha_N}} \phi(x_1, \ldots, x_N),$$
$$D_i := \partial_{x_i}, \quad D = (D_1, \ldots, D_n).$$

Neben dem Raum der Testfunktionen suchen wir einen möglichst grossen Funktionenraum, in dem wir die Lösungen von PDEs suchen können.

Definition 1.1.2. *Eine Distribution (verallgemeinerte Funktion) über* Ω *ist eine lineare Abbildung* $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$*, die bezüglich des oben definierten Konvergenzbegriffes in* $\mathcal{D}(\Omega)$ *stetig ist. Wir bezeichnen mit* $\mathcal{D}'(\Omega)$ *die Menge aller Distributionen über* Ω*.*

Beispiel 1.1.1. 1. Für beliebiges $x \in \Omega$ ist $T_x : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$T_x(\phi) := \phi(x), \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

eine Distribution über Ω (die sogenannte δ-Distribution oder das Dirac-Mass in x). Man schreibt oft: $\delta_x := T_x$, $\delta := \delta_0$.

2. Für jedes $f \in L_{1,loc}(\Omega)$ ist $T_f : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$T_f(\phi) := \int_\Omega f(x)\phi(x)\, dx, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

eine Distribution über Ω. Solche Distribution werden reguär genannt (T_f ist die durch f erzeugte Distribution und man identifiziert f mit T_f).

$\mathcal{D}'(\Omega)$ ist ein linearer Vektorraum mit der skalaren Multiplikation und Addition von linearen Abbildungen definiert durch

$$(\alpha T)(\phi) := \alpha T(\phi), \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \forall \alpha \in \mathbb{R},$$
$$(T_1 + T_2)(\phi) = T_1(\phi) + T_2(\phi), \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \forall T_1, T_2 \in \mathcal{D}'(\Omega).$$

Genau wie Fall von $\mathcal{D}(\Omega)$ kann auch $\mathcal{D}'(\Omega)$ nicht geeignet normiert werden. Es gibt aber, analog wie für $\mathcal{D}(\Omega)$, wieder die Möglichkeit einen natürlichen Konvergenzbegriff zu definieren.

Definition 1.1.3. *Seien* $(T_n)_{n=1}^\infty \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ *und* $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$*. Die Folge* T_n *konvergiert gegen* T *in* $\mathcal{D}'(\Omega)$*, wenn gilt*

$$\lim_{n\to\infty} T_n(\phi) = T(\phi), \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Beispiel 1.1.2. Für $n \in \mathbb{N}$ ist die reguläre Distribution $T_{f_n} \in \mathcal{D}'(\Omega)$ mit $\Omega = \mathbb{R}$ definiert durch

$$T_{f_n}(\phi) := \int_\Omega f_n(x)\phi(x)\,dx, \quad f_n(x) := \cos(nx), \quad \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Sei $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ mit $\operatorname{supp}\phi \subset (a,b)$, wobei $a < b$. Dann gilt $T_{f_n} \to 0$, denn

$$\begin{aligned} T_{f_n}(\phi) &= \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\phi(x)\,dx = \int_a^b \cos(nx)\phi(x)\,dx \\ &= -\int_a^b \tfrac{1}{n}\sin(nx)\phi'(x)\,dx \to 0 \quad (n \to \infty). \end{aligned}$$

Alternativ: Lemma von Riemann-Lebesgue. Beachte: die Funktionenfolge f_n besitzt auf $\mathbb{R}$ keinen punktweisen Grenzwert.

Da die Elemente von $\mathcal{D}'(\Omega)$ als Lösungen von PDE's in Betracht kommen sollen, benötigen wir eine verallgemeinerte Form der Differentiation. Natüch ist es wünschenswert, dass der neue Begriff der Differentiation und der klassische Begriff konsistent sind. D.h., ist $f \in \mathrm{C}^k(\Omega)$ und $T_f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ die von f erzeugte reguläre Distribution, dann soll gelten

$$D^\alpha(T_f) = T_{D^\alpha f}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^N \quad \text{mit} \quad |\alpha| \le k,$$

wobei $T_{D^\alpha} f$ die von $D^\alpha f$ erzeugte reguläre Distribution ist. Für reguläre Distributionen gilt aber

$$\begin{aligned} T_{D^\alpha f}(\phi) &= \int_{\operatorname{supp}\phi} D^\alpha f(x)\phi(x)\,dx = (-1)^{|\alpha|}\int_{\operatorname{supp}\phi} f(x)D^\alpha\phi(x)\,dx \\ &= (-1)^{|\alpha|}T_f(D^\alpha\phi), \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega). \end{aligned}$$

Daher fordert man für die verallgemeinerte Ableitung

$$(D^\alpha T_f)(\phi) = (-1)^{|\alpha|}T_f(D^\alpha\phi), \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Diese Art der Definition einer Ableitung ergibt auch Sinn für allgemeinere und sogar nicht-reguläre Distributionen. Die obige Rechnung motiviert daher

Definition 1.1.4. *Sei $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$ ein Multiindex. Dann ist die distributionnelle Ableitung $D^\alpha T$ von T definiert durch:*

$$(D^\alpha T)(\phi) = (-1)^{|\alpha|}T(D^\alpha\phi), \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Mit dieser Definition der Ableitung ist jede Distribution beliebig oft differenzierbar!

Beispiel 1.1.3. 1. $\Omega = \mathbb{R}^N$, $T = \delta_0$:

$$D^\alpha \delta_0(\phi) = (-1)^{|\alpha|}\delta(D^\alpha \phi) = (-1)^{|\alpha|} D_x^\alpha \phi(x)_{|x=0} = (-1)^{|\alpha|}\delta_0(D_x^\alpha \phi).$$

2. $\Omega = \mathbb{R}$, $T = T_f$ mit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := |x|$. Dann gilt

$$\begin{aligned} T_f'(\phi) = -T_f(\phi') &= -\int_{\mathbb{R}} |x|\phi'(x)\,dx = \int_{-\infty}^0 x\phi'(x)\,dx - \int_0^\infty x\phi'(x)\,dx \\ &= [x\phi(x)]_{-\infty}^0 - \int_{-\infty}^0 \phi(x)\,dx - [x\phi(x)]_0^\infty + \int_0^\infty \phi(x)\,dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} H(x)\phi(x)\,dx = T_H(\phi) \end{aligned}$$

mit

$$H(x) = \begin{cases} 1 & : x \in (0,\infty) \\ -1 & : x \in (-\infty, 0) \end{cases}.$$

3. $\Omega = \mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, $T = T_\Phi$ mit $\Phi(x) := \frac{1}{(N-2)\omega_N}\frac{1}{|x|^{N-2}}$ für $x \in \mathbb{R}^N \backslash \{0\}$, die Fundamentallösung der Laplace-Gleichung, d.h. $\Delta\Phi = \delta$. (Übung)

Bemerkung 1.1.1. Wir betrachten folgende partielle Differentialgleichung

$$Lu := \sum_{i,j=1}^N a_{ij} D_i D_j u + \sum_{j=1}^N b_j D_j u + cu = f, \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

wobei $a_{ij}, b_i, c \in \mathbb{R}$ und f eine *bekannte rechte Seite* ist. Der Operator L ist ein allgemeiner linearer partieller Differentialoperator 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Betrachten wir das obige Problem mit $f = \delta_0$, d.h. wir suchen eine Distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, die die Gleichung

$$LT = \delta_0$$

im distributionellen Sinne erfüllt, so heißt T Fundamentallösung. Ein wichtiger Satz der linearen Funktionalanalysis ist der Satz von Malgrange-Ehrenpreis, der die Existenz einer solchen Fundamentallösung sichert. Das interessante ist nun, dass jede Lösung von $Lu = f$, f ist eine Funktion eines geeigneten Funktionenraums, mit Hilfe der Fundamentallösung dargestellt werden kann. Es gilt nämlich

$$u = T * f$$

(siehe W. Rudin, „Functional Analysis“, etc.).

Für die Behandlung allgemeinerer, insbesondere nichtlinearer PDEs, sind Fundamentallösungen zweitrangig. Weiterhin ist der Distributionenraum $\mathcal{D}'(\Omega)$ ungeeignet bzw. zu gross als Lösungsraum. Besser geeignet sind z.B. Sobolev-Räume (oder allg. Besov-Räume). Ein anderer Zugang sind Hölderräume, den wir hier nicht weiter verfolgen.

1.2. Schwache Ableitungen und Sobolev-Räume

Wenn wir ein RWP zweiter Ordunung betrachten

$$-\nabla\cdot(\mathcal{A}(x,u,Du)) + \Psi(x,u,Du) = f, \quad x \in \Omega,$$

ist es notwendig den Funktionenraum so zu wählen, dass dessen Elemente u (Lösung des RWPs) reguläre distributionnelle erste Ableitungen Du besitzen. Dadurch kann $\mathcal{A}(x,u,Du)$ und $\Psi(x,u,Du)$ sinnvoll definiert werden.

Definition 1.2.1. *Sei $u \in \mathrm{L}_{1,loc}(\Omega)$. Eine Funktion $v \in \mathrm{L}_{1,loc}(\Omega)$ heisst schwache partielle D^α-Ableitung von u, $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$, wenn gilt:*

$$(D^\alpha T_u)(\phi) = \int_\Omega v(x)\phi(x)\,dx, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

d.h. $D^\alpha T_u = T_v$. Dafür schreiben wir kurz: $D^\alpha u = v$.

Schwache partielle Ableitung (fast überall auf Ω) sind eindeutig, wenn sie existieren. Dies ist eine Folgerung des folgenden Fundamentallemmas der Variationsrechnung.

Lemma 1.2.1. *Sei $u \in \mathrm{L}_{1,loc}(\Omega)$. Wenn*

$$\int_\Omega u(x)\phi(x)\,dx = 0, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

dann gilt

$$u(x) = 0 \quad \textit{f. ü. auf } \Omega.$$

Proof. Beweisidee: Für eine beliebige kompakte Menge $K \subset \Omega$ (echt enhalten, da Ω offen), konstruiert man eine Folge $(\phi_n)_n \subset \mathcal{D}(\Omega)$ mit den folgenden Eigenschaften:

1. $\phi_n(x) \to \chi_K(x)\,\mathrm{sign}(u) =: s_K(x)$ für f. a. $x \in \Omega$. Hierbei bezeichnet χ_K die charakt. Funktion und sgn die Signumsfunktion, d.h.

$$\chi_K(x) := \begin{cases} 1 & : x \in K \\ 0 & : x \notin K \end{cases}, \quad \mathrm{sign}(z) := \begin{cases} 1 & : z > 0 \\ 0 & : z = 0 \\ -1 & : z < 0 \end{cases}.$$

2. $|\phi_n(x)| \leq 1$ auf $K_n := \{x \in \Omega : \mathrm{dist}(x,K) \leq 1/n\} \subset \Omega$,
3. $\phi_n = 0$ auf $\Omega \backslash K_n$.

Wählt man nun $\phi = \phi_n$, dann folgt mit Hilfe des Satzes der dominierten Konvergenz von Lebesgue

$$0 = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \phi_n(x)u(x)\,dx = \int_K |u(x)|\,dx$$

und somit $u = 0$ f. ü. auf K. Da die Menge $K \subset \Omega$ beliebig war, folgt die Behauptung.

Die Konstruktion der approximierenden Folge $(\phi_n)_n$ erfolgt mit Hilfe einer Faltung. Dazu benötigen wir den folgenden „Mollifier"

$$\rho(x) := c \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-|x|^2}} & : |x| < 1 \\ 0 & : |x| \geq 1 \end{cases},$$

wobei die Konstante $c > 0$ so gewählt wird das $\int_{\mathbb{R}^N} \rho(x)\,dx = 1$ gilt. Man rechne nach, dass $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ mit $\operatorname{supp}\rho = \overline{B_1(0)}$. Definiere weiter

$$\rho_n(x) := n^N \rho(nx), \quad n \in \mathbb{N}, \quad x \in \mathbb{R}^N$$

und damit ist $\rho_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ mit $\operatorname{supp}\rho_n = \overline{B_{1/n}(0)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Folge ϕ_n erhält man nun durch die Faltung von s_K mit ρ_n, d.h.

$$\begin{aligned} \phi_n(x) &:= \int_{\mathbb{R}^N} \rho_n(x-y)s_K(y)\,dy, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad n \in \mathbb{N}, \\ &= \int_K \rho_n(x-y)s_K(y)\,dy. \end{aligned}$$

Eigenschaften der Folge ϕ_n:

- $\phi_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit

$$D_x^\alpha \phi_n(x) = \int_{\mathbb{R}^N} D_x^\alpha \rho_n(x-y)s_K(y)\,dy, \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^N, \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

- $\operatorname{supp}\phi_n \subset K_n = \{x \in \mathbb{R}^N : \operatorname{dist}(x,K) \leq 1/n\}$, da $\operatorname{supp} s_K \subset K$ und $\operatorname{supp}\rho(x-\cdot) = \overline{B_{1/n}(x)}$. (Berücksichtige, dass $\rho_n(x-y) = 0$ für alle $|x-y| > 1/n$ (sogar $\geq 1/n$) und da $y \in K$ ist, gilt $\rho_n(x-y) = 0$ für alle $x \in \Omega \backslash K_n$.)
- es gilt $|\phi_n(x)| \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}^N$, denn

$$\|\phi_n\|_{\mathrm{L}_\infty(\mathbb{R}^N)} \leq \|\rho_n\|_{\mathrm{L}_1(\mathbb{R}^N)} \|s_K\|_{\mathrm{L}_\infty(\mathbb{R}^N)} = 1, \quad \text{Young's Ungleichung},$$

da

$$\int_{\mathbb{R}^N} \rho_n(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^N} n^N \rho(nx)\,dx = \int_{\mathbb{R}^N} \rho(y)\,dy = 1.$$

- $\phi_n \to s_K$ f. ü in Ω:

$$\begin{aligned}
|\phi_n(x) - s_k(x)| &= |\int_{\mathbb{R}^N} \rho_n(x-y)[s_K(y) - s_K(x)]\,dy| \\
&\leq cn^N \int_{B_{1/n}(x)} \rho(n(x-y))|s_K(y) - s_K(x)|\,dy \\
&\leq cn^N \int_{B_{1/n}(x)} |s_K(y) - s_K(x)|\,dy \\
&= c\omega_N \frac{1}{|B_{1/n}(x)|} \int_{B_{1/n}(x)} |s_K(y) - s_K(x)|\,dy.
\end{aligned}$$

Da nun die Funktion s_K in $\mathrm{L}_{1,loc}(\Omega)$ liegt, gilt nach dem Lebesgue'schen Satz[2]

$$\tfrac{1}{|B_{1/n}(x)|} \int_{B_{1/n}(x)} |s_K(y) - s_K(x)|\,dy \longrightarrow_{n\to\infty} 0 \quad \text{für f. a. } x \in \Omega$$

und somit

$$|\phi_n(x) - s_K(x)| \to_{n\to\infty} 0 \quad \text{für f.a. } x \in \Omega.$$

$\square$

Beispiel 1.2.1. 1. $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $u(x) := |x|$, besitzt die schwache Ableitung $u' = H$.

2. Die Fundamentallösung von $\Delta u = \delta_0$ (für $N \geq 3$) ist gegeben durch $\Phi(x) = \frac{1}{(N-2)\omega_N}\frac{1}{|x|^{N-2}}$ und besitzt die schwachen Ableitung $D_i\Phi(x) = -\frac{1}{\omega_N}\frac{x_i}{|x|^N}$, $i = 1, \ldots, N$.

Definition 1.2.2 (Sobolev-Räume)**.** *Sei $1 \leq p \leq \infty$. Dann bezeichnet $\mathrm{W}^1_p(\Omega)$ den Funktionenraum aller $v \in \mathrm{L}_p(\Omega)$, die für alle $i = 1, \ldots, N$ schwache Ableitungen $D_i v \in \mathrm{L}_p(\Omega)$ besitzen. Der Raum $\mathrm{W}^1_p(\Omega)$ wird als Sobolev-Raum bezeichnet.*

Sobolevräume können nomiert werden.

Theorem 1.2.1. *Sei $1 \leq p \leq \infty$.*

(a) Auf $\mathrm{W}^1_p(\Omega)$ wird durch

$$\|v\|_{1,p} = \|v\|_{\mathrm{W}^1_p(\Omega)} := \left(\|v\|^p_{\mathrm{L}_p(\Omega)} + \sum_{j=1}^N \|D_j v\|^p_{\mathrm{L}_p(\Omega)} \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$\|v\|_{1,\infty} = \|v\|_{\mathrm{W}^1_\infty(\Omega)} := \|v\|_{\mathrm{L}_\infty(\Omega)} + \sum_{j=1}^N \|D_j v\|_{\mathrm{L}_\infty(\Omega)}$$

eine Norm definiert. $(\mathrm{W}^1_p(\Omega), \|\cdot\|_{1,p})$ ist ein Banachraum.

[2]Satz: Sei $f \in \mathrm{L}_{1,loc}(\Omega)$, dann gilt $\lim_{r\to 0} \frac{1}{|B_r(x_0)|}\int_{B_r(x_0)} |f(x) - f(x_0)|\,dx = 0$ für fast alle $x \in \Omega$. Diese Punkte x_0 werden „Lebesgue-Punkte“ von f genannt.

(b) Für $p = 2$ wird durch

$$(v|w)_{1,2} := (v|w)_{\mathrm{L}_2(\Omega)} + \sum_{j=1}^{N} (D_j v|D_j u)_{\mathrm{L}_2(\Omega)}, \quad \forall u, v \in \mathrm{W}_2^1(\Omega)$$

ein Skalarprodukt in $\mathrm{H}^1(\Omega) := \mathrm{W}_2^1(\Omega)$ *definiert, das die Norm* $\|\cdot\|_{1,2}$ *erzeugt. Somit ist* $(\mathrm{H}^1(\Omega), \|\cdot\|_{1,2})$ *ein Hilbertraum.*

Proof. Das die obige Definition eine Norm bzw. ein Skalarprodukt ist, sieht man durch einfaches Nachrechnen. Das der Raum $\mathrm{W}_p^1(\Omega)$ ein Banachraum ist, folgt im wesentlichen aus der Vollständigkeit des $\mathrm{L}_p(\Omega)$. Sei $v_n \in \mathrm{W}_p^1(\Omega)$ eine CF (Cauchy-Folge). Dann folgt aus der Definition der Norm, dass v_n, $D_1 v_n, \dots, D_N v_n$ CFen in $\mathrm{L}_p(\Omega)$ sind und somit existieren v, $u_1, \dots, u_N \in \mathrm{L}_p(\Omega)$ mit

$$v_n \to v \in \mathrm{L}_p(\Omega), \quad D_i v_n \to u_i \in \mathrm{L}_p(\Omega), \quad i = 1, \dots, N.$$

Zu zeigen bleibt, dass $D_i v = u_i$ für $i = 1, \dots, N$ gilt, d.h. die schwache Ableitung von $D_i v$ von v stimmt mit u_i überein. Dazu folgende Rechnung. Sei $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, dann gilt

$$\begin{aligned} \int_\Omega u_i(x)\phi(x)\,dx &= \lim_{n\to\infty} \int_\Omega D_i v_n(x)\phi(x)\,dx \qquad \text{(starke Konvergenz)} \\ &= -\lim_{n\to\infty} \int_\Omega v_n(x) D_i\phi(x)\,dx = -\int_\Omega v(x) D_i \phi(x)\,dx, \end{aligned}$$

d.h. aber $u_i = D_i v$ nach der Definition der schwachen Ableitung. Folglich haben wir $v \in \mathrm{W}_p^1(\Omega)$ und (siehe oben) $v_n \to v$ in $\mathrm{W}_p^1(\Omega)$. □

Bemerkung 1.2.1. 1. Analog kann, für alle $k \in \mathbb{N}$, $1 \le p \le \infty$, der Sobolev-Raum höherer Ordnung $\mathrm{W}_p^k(\Omega)$ definiert werden als Raum der Funktionen $v \in \mathrm{L}_p(\Omega)$, die schwache partielle Ableitungen bis zur Ordnung k besitzen und alle diese Ableitungen selbst wieder zu $\mathrm{L}_p(\Omega)$ gehören. Ausgestattet mit der Norm

$$\begin{aligned} \|v\|_{\mathrm{W}_p^k(\Omega)} &= \left(\sum_{|\alpha|\le k} \|D^\alpha v\|_{\mathrm{L}_p(\Omega)}^p \right)^{1/p}, \quad 1 \le p < \infty, \\ \|v\|_{\mathrm{W}_p^k(\Omega)} &= \sum_{|\alpha|\le k} \|D^\alpha v\|_{\mathrm{L}_p(\Omega)}, \quad p = \infty, \end{aligned}$$

ist der Raum $\mathrm{W}_p^k(\Omega)$ wieder ein Banachraum.

2. Man kann Sobolev-Räume auch für $k \in \mathbb{R}$ definieren. Dies kann im wesentlichen auf zwei verschiedene Wege getan werden und führt auf die folgenden Skalen von Räumen

(a) die sogenannten Bessel-Potential Räume $\mathrm{H}_p^k(\Omega)$

(b) die Sobolev-Slobodeckij Räume $\mathrm{W}_p^k(\Omega)$.

Dabei gilt

$$\mathrm{H}_p^k(\Omega) = \mathrm{W}_p^k(\Omega) \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Die Theorie der Funktionenräume führt jedoch noch viel allgemeinere Räume ein ... (vgl. Triebel).

3. Es gibt auch lokale Sobolevräume, z.B. $\mathrm{W}^1_{p,loc}(\Omega)$ (die Menge der $\mathrm{L}_{p,loc}(\Omega)$ Funktionen deren schwache partielle Ableitungen definiert sind als die Menge der $\mathrm{L}_{p.loc}(\Omega)$-Funktionen, die schwache partielle erste Ableitungen in $\mathrm{L}_{p,loc}(\Omega)$ besitzen.

Beispiel 1.2.2. 1. Die Fundamentallösung

$$\Phi(x) = \frac{1}{(N-2)\omega_N} \frac{1}{|x|^{N-2}}, \quad N \geq 3,$$

der Laplace-Gleichung ist Element des $\mathrm{W}^1_{1,loc}(\mathbb{R}^N)$ und sogar $\mathrm{W}^1_{p,loc}(\mathbb{R}^N)$ für alle $1 \leq p < N/(N-1)$.

2. Die Funktion $u(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$, liegt in $\mathrm{W}^1_{p,loc}(\mathbb{R})$ für alle $p \in [1, \infty)$.

Da zu den RWPen auch Randbedingungen gehören, so z.B.

$$\begin{aligned} -\nabla\cdot(A(x,u,Du)) + \Phi(x,u,Du) &= f, \quad x \in \Omega, \\ u &= g, \quad x \in \partial\Omega, \end{aligned}$$

mit gegebenen Funktionen f und g, stellt sich die Frage des Randwertes von $u \in \mathrm{W}^1_p(\Omega)$. Beachte: Da nur $u \in \mathrm{L}_p(\Omega)$ und deren schwache Ableitungen in $\mathrm{L}_p(\Omega)$ liegen, ist u a priori nur fast überall definiert. Im Übrigen sind die Elemente von $\mathrm{W}^1_p(\Omega)$ (genauso wie die Elemente des L_p) Äquivalenzklassen von Funktionen, die fast überall übereinstimmen. Der Rand $\partial\Omega$ ist eine N-dimensionale Lebesgue-Nullmenge für beschränkte Gebiete Ω. Darum macht es eigentlich keinen Sinn von den Werten auf dem Rand zu sprechen. Ein erster Schritt dies zu verstehen, liefert die folgende Definition.

Definition 1.2.3. *Es bezeichnet $\mathring{\mathrm{W}}^1_p(\Omega) := \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{\|\cdot\|_{1,p}}$ den Teilraum der Funktionen $u \in \mathrm{W}^1_p(\Omega)$, die durch eine Folge von Testfunktionen $(u_n)_n \subset \mathcal{D}(\Omega)$ in der $\|\cdot\|_{1,p}$-Norm approximiert werden können.*

Wenn $\Omega = \mathbb{R}^N$, so gilt $\mathring{\mathrm{W}}^1_p(\Omega) = \mathrm{W}^1_p(\Omega)$. Für beschränkte offene Mengen Ω gilt jedoch

$$\mathring{\mathrm{W}}^1_p(\Omega) \subset \mathrm{W}^1_p(\Omega),$$

also strikt kleiner als $\mathrm{W}^1_p(\Omega)$. Der Raum $\mathring{\mathrm{W}}^1_p(\Omega)$ bietet jedoch eine Möglichkeit einer Randspur im verallgemeinerten Sinne. Da jedes Element des $\mathring{\mathrm{W}}^1_p(\Omega)$ durch eine Folge von Testfunktionen approximiert werden kann und diese auf dem Rand verschwinden. Dies Bedarf natürlich einer Präzision!

Dafür benötigen wir

Definition 1.2.4. *Seien*$(X, ||\cdot||)_X)$ *und* $(Y, \|\cdot\|_Y)$ *Banachräume.*

(a) Falls eine lineare injektive Abbildung $j : X \to Y$ *existiert, dann heisst* X *in* Y *eingebettet.*

(b) Falls die injektive lineare Abbildung aus (a) stetig ist, d.h. ein $c > 0$ *existiert mit*

$$\|jx\|_Y \leq c\|x\|_X \quad \forall x \in X,$$

dann heisst X *stetig in* Y *eingebettet. Notation:* $X \hookrightarrow Y$.

(c) Falls j *aus (a) stetig und ausserdem beschränkte Teilmengen von* X *in relativ kompakte Teilmengen von* Y *überführt, d.h. wenn für jede in* X *beschränkte Folge* $(x_n)_n$ *die Folge* $(j(x_n))_n$ *eine in* Y *konvergente Teilfolge enthält, dann heisst* X *kompakt eingebettet in* Y*. Notation:* $X \hookrightarrow\hookrightarrow Y$.

Bemerkung 1.2.2. 1. Falls X in Y eingebettet ist, kann X algebraisch als Teilraum von Y aufgefasst werden, indem man jedes Element $x \in X$ mit $j(x) \in Y$ identifiziert.

2. Falls sogar $X \hookrightarrow Y$, dann kann X auch im topologischen Sinn als Teilraum von Y angesehen werden. X „erbt" die topologischen Eigenschaften von Y . Ist z.B. Y separabel oder reflexiv, so gilt gleiches auch für X. Zur Illustration:

$$j_{iso} : X = \mathrm{W}^1_p(\Omega) \to Y = \mathrm{L}_p(\Omega; \mathbb{R}^{N+1}) := \mathrm{L}_p(\Omega)^{N+1}, \quad u \mapsto (u, D_1u, \ldots, D_Nu)$$

ist eine lineare injektive Einbettung. Die natürliche Norm des $\mathrm{L}_p(\Omega; \mathbb{R}^{N+1})$ ist gegeben durch

$$\|v\|_Y := \left(\sum_{k=1}^{N} \|v_k\|^p_{\mathrm{L}_p(\Omega)}\right)^{1/p}$$

oder durch

$$|||v|||_Y = \sum_{k=1}^{N} \|v_k\|_{\mathrm{L}_p(\Omega)}.$$

beide Normen sind äquivalent. $(Y, \|\cdot\|_Y)$ ist ein Banachraum und $j : X \to Y$ sogar eine Isometrie, d.h. $\|v\|_X = \|v\|_Y$ für alle $x \in X$. Aus der Separabilität von $\mathrm{L}_p(\Omega)$ und der daraus resultierenden Separabilität des Produktraumes $\mathrm{L}_p(\Omega; \mathbb{R}^{N+1})$ und der Isometrie folgt nun die Separabilität. (Das Bild $j(X)$ is abgeschlossen und damit ist $j(X) \subset Y$ ein abgeschlossener Teilraum von Y.

3. Wenn man die Eigenschaft „Eine Teilmenge eines separablen metrischen Raums ist separabel.“ benutzt, reicht es aus die obige Abbildung wie folgt zu definieren $j : \mathrm{W}_p^1(\Omega) \to \mathrm{L}_p(\Omega)$, $j(u) := u$. Dann ist j zwar keine Isometrie mehr, jedoch gilt $\|v\|_p \leq \|v\|_{1,p}$, d.h. $c = 1$ in der obigen Ungleichung. $j(X) = X \subset Y$ ist eine Teilmenge des separablen Raums $Y = \mathrm{L}_p(\Omega)$.

4. Mit Hilfe des Satzes „*Jeder abgeschlossene Unterraum eines reflexiven Banach-Raums ist selber ein reflexiver Banach-Raum.*“ kann man die Reflexivität von $\mathrm{W}_p^1(\Omega)$ für $1 < p < \infty$ zeigen. Trivialerweise ist Y abgeschlossen (Banachraum!) und $j_{iso}(X) \subset Y = \mathrm{L}_p(\Omega)$ ist abgeschlossen (j_{iso} ist eine Isometrie!).

Theorem 1.2.2. *Für alle $1 \leq p < \infty$ ist der Banachraum $\mathrm{W}_p^1(\Omega)$ separabel. Für alle $1 < p < \infty$ ist $\mathrm{W}_p^1(\Omega)$ reflexiv.*

Eine andere stetige Einbettung liefert der folgende Satz.

Theorem 1.2.3. *Sei $u \in \mathrm{W}_p^1(I)$ mit $I = (a,b)$, $a < b$, $1 \leq p \leq \infty$. Dann existiert eine absolut stetige Funktion $\hat{u} : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $u = \hat{u}$ f. ü. auf I und es existiert eine nur von a, b und p abhängige Konstante $C > 0$, so dass*

$$\|\hat{u}\|_\infty := \max_{x \in I} |\hat{u}(x)| \leq C\|u\|_{\mathrm{H}_p^1(I)}.$$

D.h., die Einbettung $j : \mathrm{W}_p^1(I) \to \mathrm{C}(I)$ ist stetig. Man kann somit u mit einer stetigen Funktion identifizieren.

Bemerkung 1.2.3. 1. Für $N > 1$ gilt:

$$\mathrm{W}_p^1(\Omega) \hookrightarrow \mathrm{C}(\overline{\Omega}), \quad 1 - \frac{N}{p} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad p > N,$$

wobei $\Omega \in \{\mathbb{R}^N, \mathbb{R}_+^N\}$ oder ein beschränktes glatt berandetes Gebiet ist.

2. Ist $1 < p < \infty$, dann gilt sogar

$$\mathrm{W}_p^1(\Omega) \hookrightarrow \mathrm{C}^\gamma(\overline{\Omega}), \quad 1 > \gamma := 1 - \frac{N}{p} > 0.$$

3. Für $p = \infty$, $\Omega = I = (a,b)$ erhält man

$$\mathrm{W}_\infty^1(I) \hookrightarrow \mathrm{C}^{1-}([a,b]).$$

Proof. (von Theorem 1.2.3) Für $x_0 \in [a,b]$ definieren wir die Funktion

$$v(x) := \int_{x_0}^x u'(s)ds, \quad x \in [a,b].$$

Die schwache Ableitung u' liegt in $\mathrm{L}_p(a,b) \subset \mathrm{L}_1(a,b)$, $\forall p \in [1,\infty]$ (Die Funktion u' ist Lebesgue-integrierbar.). Nach dem Haupsatz für Lebesgue-Integrale ist die Funktion

v absolut stetig und damit fast überall differenzierbar. Die klassische Ableitung v' stimmt fast überall mit der schwachen Ableitung u' überein. Für alle $\phi \in \mathcal{D}(I)$ folgt damit

$$\int_a^b (v(x) - u(x))\phi'(x)\, dx = 0.$$

Daraus folgt (Übung), dass $u(x) = v(x) + const$ fast überall auf $[a, b]$. Damit ist gezeigt, dass u fast überall mit einer absolut stetigen Funktion $\hat{u} : [a, b] \to \mathbb{R}$ übereinstimmt, $\hat{u} := v + const$.

Die Abschätzung wird mit der Hölder-Ungleichung gezeigt. Der MWS der Integralrechnung liefert

$$\exists x_0 \in [a, b] : \quad \hat{u}(x_0) = \frac{1}{b-a} \int_a^b \hat{u}(s)\, ds.$$

Damit gilt

$$\hat{u}(x) = \hat{u}(x_0) + \int_{x_0}^x \hat{u}'(s)\, ds = \frac{1}{b-a} \int_a^b \hat{u}'(s)\, ds + \int_{x_0}^x \hat{u}'(s)\, ds, \quad \forall x \in I.$$

Hölder liefert schliesslich

$$\begin{aligned}
|\hat{u}(x)| &\le \frac{1}{b-a} \int_a^b |\hat{u}'(s)|\, ds + \int_{x_0}^x |\hat{u}'(s)|\, ds \\
&\le \frac{1}{b-a} \int_a^b |\hat{u}'(s)|\, ds + \int_a^b |\hat{u}'(s)|\, ds \\
&\le [\frac{1}{b-a} + 1](\int_a^b 1\, ds)^{1/p'} \|\hat{u}'\|_{\mathrm{L}_p(I)} = [\frac{1}{b-a} + 1](a-b)^{(1-p)/p} \|\hat{u}'\|_{\mathrm{L}_p(I)} \\
&\le C(a, b, p)\|u\|_{1,p}.
\end{aligned}$$

□

1.3. Approximations- und Fortsetzungssätze

Theorem 1.3.1. *Sei Ω ein beschränktes Gebiet im $\mathbb{R}^N$, $N \ge 1$, $1 \le p < \infty$. Dann gilt:*

(a) $\mathrm{W}^1_p(\Omega) \cap \mathrm{C}^\infty(\Omega)$ ist dicht in $\mathrm{W}^1_p(\Omega)$, d.h. für alle $u \in \mathrm{W}^1_p(\Omega)$ existiert eine Folge $\{u_n\}_n \subset \mathrm{W}^1_p(\Omega) \cap \mathrm{C}^\infty(\Omega)$, so dass

$$u_n - u \to 0 \quad in \quad \mathrm{W}^1_p(\Omega),$$

d.h.

$$u_n - u \to 0, \quad D_i u_n - D_i u \to 0 \quad in \quad \mathrm{L}_p(\Omega),\ \forall i = 1, \dots, N.$$

(b) Wenn der Rand von Ω glatt ist, dann gilt:

$$\overline{\mathrm{C}^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{\mathrm{W}_p^1(\Omega)}} = \mathrm{W}_p^1(\Omega),$$

kurz $\mathrm{C}^\infty(\Omega) \overset{d}{\hookrightarrow} \mathrm{W}_p^1(\Omega)$.

Den Beweis findet man z.B. in Evans, „Partial differential equations“. Ein anderes wichtiges Resultat ist der folgende Fortsetzungssatz

Theorem 1.3.2. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ein beschränktes glatt berandetes Gebiet, genauer $\partial\Omega \in C^1$, $N \geq 1$, $1 \leq p < \infty$. Sei V eine offene Menge mit $\Omega \subset\subset V \subset \mathbb{R}^N$. Dann existiert eine Abbildung (Fortsetzung) $E : \mathrm{W}_p^1(\Omega) \to \mathrm{W}_p^1(\mathbb{R}^N)$, so dass für alle $u \in \mathrm{W}_p^1(\Omega)$ gilt:*

1) $Eu = u$ f. ü. auf Ω,

2) $Eu = 0$ f. ü. auf $\mathbb{R}^N \backslash V$,

3) $\|Eu\|_{\mathrm{W}_p^1(\mathbb{R}^N)} \leq C\|u\|_{\mathrm{W}_p^1(\Omega)}$ mit einem $C > 0$, welches von u unabhängig ist, d.h. E ist eine stetige Abbildung (I.a. ist E eine nichtlineare Abbildung.).

Evans.

Der letzte Satz dieses Abschnittes geht noch einmal auf das Problem der Spur ein. Es gibt eine sogenannte Spurtheorie für Sobolev-Räume. Der einfachste Fall lautet

Theorem 1.3.3. *Sei Ω ein beschränktes glattberandetes Gebiet im R^N, genauer $\Gamma := \partial\Omega \in C^1$, $N \geq 1$, $1 \leq p < \infty$. Dann existiert ein stetiger linearer Operator*

$$T_\Gamma : \mathrm{W}_p^1(\Omega) \to \mathrm{L}_p(\partial\Omega)$$

mit der Eigenschaft

$$T_\Gamma u = u_{|\Gamma}, \quad \forall u \in \mathrm{W}_p^1(\Omega) \cap \mathrm{C}(\overline{\Omega}).$$

T_Γ heisst Spuroperator bzgl. Γ; $T_\Gamma u$ heisst die Spur von $u \in \mathrm{W}_p^1(\Omega)$ auf Γ.

Beweisidee: Man zeigt zuerst für $u \in \mathrm{C}^\infty(\overline{\Omega})$ die Abschätzung

$$\int_{\partial\Omega} |u(x)|^p \, d\sigma(x) \leq C(p,\Omega)\|u\|^p_{\mathrm{W}_p^1(\Omega)}$$

mit einem $C(p,\Omega) > 0$. Die obige Abschätzung zeigt, dass der lineare Operator

$$\tilde{T}_\Gamma : \mathrm{C}^\infty(\overline{\Omega}) \cap \mathrm{W}_p^1(\Omega) \to \mathrm{L}_p(\partial\Omega), \quad u \mapsto \Gamma u = u_{|\partial\Omega}$$

stetig ist. Da nach Satz 1.3.1 der Raum $\mathrm{C}^\infty(\overline{\Omega})$ dicht in $\mathrm{W}_p^1(\Omega)$ liegt, kann der Operator $\tilde{T}_\Gamma$ zu einem linearen stetigen Operator T_Γ auf $\mathrm{W}_p^1(\Omega)$ fortgesetzt werden.

Bemerkung 1.3.1.
- Mit Hilfe des Spuroperators kann von der Spur einer beliebigen Sobolev-Funktion u gesprochen werden; man schreibt oft auch $u_{|\partial\Omega}$.
- Man kann zeigen, dass
$$\overset{\circ}{\mathrm{W}}{}^1_p(\Omega) = \{u \in \mathrm{W}^1_p(\Omega) : u_{|\partial\Omega} = 0 \text{ f. ü auf } \partial\Omega\},$$
d.h. $N(T_{\partial\Omega}) = \overset{\circ}{\mathrm{W}}{}^1_p(\Omega)$.
- Man kann zeigen, dass es eine lineare stetige Abbildung $R : T_\Gamma(\mathrm{W}^1_p(\Omega)) \to \mathrm{W}^1_p(\Omega)$ gibt.
- Es gilt: $T_{\partial\Omega}(\mathrm{W}^1_p(\Omega)) = \mathrm{W}^{1-1/p}_p(\partial\Omega)$ für $1 < p < \infty$.

Beispiel 1.3.1. Sei Ω ein glattberandetes, beschränktes Gebiet des $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, $x_0 \in \mathbb{R}^N$ und $v : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ definiert durch $v(x) = \frac{1}{N-2}\frac{1}{|x-x_0|^{N-1}}$. Dann gilt $v \in \mathrm{W}^1_p(\Omega)$ für alle $1 \leq p < N/(N-1)$. Damit aber auch $v_{|\partial\Omega} \in T_{\partial\Omega}(\mathrm{W}^1_p(\Omega))$. Liegt der Punkt x_0 auf dem Rand von Ω, so ist die Funktion $u : \partial\Omega \to \mathbb{R}$, $u(x) := v_{|\partial\Omega}(x)$ offensichtlich unstetig und unbeschränkt.

1.4. Kompakter Einbettungssatz und Poincare'sche Ungleichung

Theorem 1.4.1. *Sei Ω ein beschränktes glattberandetes Gebiet im $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, $1 \leq p < \infty$, $1 \leq q < \infty$. Dann gilt:*
$$\mathrm{W}^1_p(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow \mathrm{L}_q(\Omega), \quad \textit{für} \quad 1 > N(1/p - 1/q)_+.$$

Es treten folgende Fälle auf:

1. $1/p - 1/q \leq 0$, d.h. aber $p \geq q$. Somit gilt: $\mathrm{W}^1_p(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow \mathrm{L}_q(\Omega)$ für alle $q \leq p$.
2. $1/p - 1/q > 0$, d.h. $1 - N/p > -N/q$. Hier gibt es zwei weitere Fälle
   - Ist $p \geq N$, dann gilt $1 - N/p \geq 0 > -N/q$ für alle $1 \leq q < \infty$. Damit gilt: Für $p \geq N$ ist $\mathrm{W}^1_p(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow \mathrm{L}_q(\Omega)$ für alle $1 \leq q < \infty$.
   - Für $p < N$ ist $\mathrm{W}^1_p(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow \mathrm{L}_q(\Omega)$ für alle $1 \leq q < p^* := \frac{Np}{N-p}$.

Wofür ist die kompakte Einbettung nützlich? Oft versucht man die Existenz einer Lösung $u \in Z_0$ einer Differentialgleichung $Lu = f$, L ein (nichtlinearer) Differentialoperator, Z_0 ein geeigneter Funktionenraum, $f \in X_0$, X_0 ein weiterer Funktionenraum, zu zeigen, indem man ein Approximationsargument einbaut. Z.B. könnte es so sein, dass man für glatte rechte Seiten eine Lösung konstruieren kann, d.h. man kann $Lu_n = f_n \in X_1 \subset X_0$ lösen und erhält ein $u_n \in Z_1 \subset Z_0$. Nun muss man zeigen, dass die $u_n \in Z_1 \subset Z_0$ in Z_0 gegen eine Lösung von $Lu = f$ konvergieren. Dies ist jedoch für nichtlineare Probleme oft nicht möglich, aber zumindest Beschränktheit in Z_1 oder Z_0. Im ersteren Fall hat man für $Z_1 \hookrightarrow\hookrightarrow Z_0$ die Konvergenz einer Teilfolge u_{n_k} gegen ein $u \in Z_0$. Bleibt zu zeigen, dass u die Gleichung $Lu = f$ löst. Im zweiten Fall benötigt man, dass zumindest $Z_0 \hookrightarrow\hookrightarrow Y$ mit einem weiteren Banachraum Y. Manchmal reicht die daraus resultierende Konvergenz einer Teilfolge von u_n gegen ein Element $u \in Y$ aus, um $u \in Z_0$ und $Lu = f$ zeigen zu können.

Von besonderer Bedeutung ist auch die Poincare' sche Ungleichung, die zeigt, dass die Norm einer $\overset{\circ}{\mathrm{W}}{}^1_p(\Omega)$ Funktion allein durch ihre Ableitungen bestimmt ist.

Theorem 1.4.2. *Sei Ω eine beschränkte, offene Menge in $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, $1 \leq p < \infty$. Dann existiert eine Konstante $C > 0$, die nur von Ω und p abhängt, so dass*

$$\|v\|^p_{\mathrm{L}_p(\Omega)} \leq C(\Omega, p) \sum_{j=1}^{N} \|D_j v\|^p_{\mathrm{L}_p(\Omega)}, \quad \forall v \in \overset{\circ}{\mathrm{W}}{}^1_p(\Omega).$$

Insbesondere definiert $|||v||| := \left(\sum_{j=1}^N \|D_j v\|^p_{\mathrm{L}_p(\Omega)}\right)^{1/p}$ eine Norm auf $\overset{\circ}{\mathrm{W}}{}^1_p(\Omega)$, die äquivalent zur $\|\cdot\|_{1,p}$-Norm ist.

Proof. Wir zeigen nur die Ungleichung für Funktionen $v \in \mathcal{D}(\Omega)$, da $\mathcal{D}(\Omega)$ dicht in $\overset{\circ}{\mathrm{W}}{}^1_p(\Omega)$ liegt. Da Ω beschränkt ist, existiert ein $d > 0$, so dass $\Omega \subset \{x = (x_1, ..., x_N) \in \mathbb{R}^N, |x_1| < d\}$. Hieran erkennt man sofort, dass es ausreicht Beschränkheit bzgl. einer Raumrichtung zu haben. Vorübergehend nehmen wir an, dass $p > 1$. Mit partieller Integration erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\|v\|^p_{\mathrm{L}_p(\Omega)} &= \int_\Omega 1 \cdot |v(x)|^p \, dx = \int_\Omega \partial_{x_1} x_1 |v(x)|^p \, dx \\
&= \int_{\partial\Omega} x_1 \cdot \nu(x) |v(x)|^p \, d\sigma(x) - \int_\Omega x_1 p |v(x)|^{p-1} \mathrm{sgn}(v(x)) \partial_{x_1} v(x) \, dx \\
&= - \int_\Omega x_1 p |v(x)|^{p-1} \mathrm{sgn}(v(x)) \partial_{x_1} v(x) \, dx \leq p \|x_1\|_\infty \int_\Omega |v(x)|^{p-1} |\partial_{x_1} v(x)| \, dx \\
&\leq p \|x_1\|_\infty \|v\|_p^{p-1} \|\partial_{x_1} v\|_p \leq pd \|v\|_p^{p-1} \|Dv\|_p.
\end{aligned}$$

Division durch $\|v\|_p^{p-1}$ und erheben der p-ten Potenz liefert die Ungleichung. Daraus erkennt man $C \leq dp$ und der Fall $p = 1$ erhält man durch den Grenzprozess $p \to 1$. □

Bemerkung 1.4.1.

- Die Ungleichung gilt auch für $\mathrm{W}^1_p(\Omega)$ Funktionen v mit $\int_\Omega v \, dx = 0$ bzw.

$$\|v - \overline{v}\|^p_{\mathrm{L}_p(\Omega)} \leq C(\Omega, G, p) \sum_{j=1}^{N} \|D_j v\|^p_{\mathrm{L}_p(\Omega)}, \quad \forall v \in \mathrm{W}^1_p(\Omega), \quad \overline{v} := \frac{1}{|G|} \int_G v(x) \, dx,$$

  wobei $G \subset \Omega$ mit $|G| > 0$.

- Ist $\Gamma_1 \subset \Gamma = \partial\Omega$ mit $|\Gamma_1| > 0$, dann gilt ebenfalls

$$\|v - \overline{v}_{\Gamma_1}\|^p_{\mathrm{L}_p(\Omega)} \leq C(\Omega, \Gamma_1, p) \sum_{j=1}^{N} \|D_j v\|^p_{\mathrm{L}_p(\Omega)}, \quad \forall v \in \mathrm{W}^1_p(\Omega),$$

  wobei $\overline{v}_{\Gamma_1} = \frac{1}{|\Gamma_1|} \int_{\Gamma_1} v(x)\, d\sigma(x)$.

- Die Poincare' sche Ungleichung gilt i.a. nicht für unbeschränkte Gebiete Ω. Wie schon im Beweis erwähnt, funktioniert der Beweis für Gebiete, die bzgl. einer Raumachse beschränkt sind. Gegenbsp. für $\Omega = \mathbb{R}$, $p = 1$: betrachte $u_n(x) := \min\{1, \max\{n + 1 - |x|, 0\}\}$. Dann müsste gelten

$$2n + 1 = \|u_n\|_{\mathrm{L}_1(\mathbb{R})} \leq C \int_{\mathbb{R}} |u'(x)|, dx = C2,$$

  was ein Widerspruch zur beliebigen Wahl von n und der Unabhängigkeit der Konstante C von n ist.

1.5. Dualräume und Sobolev-Räume

Zur Erinnerung:
Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein Banachraum. Dann bezeichnet man mit X^* die Menge der stetigen linearen Funktionale auf X, d.h. $X^* = \mathcal{L}(X, \mathbb{R})$; insbesondere gilt $|\phi(x)| \leq c\|x\|$ für alle $x \in X$. $X*$ wird der Dualraum von X genannt. Für einen beliebigen Vektorraum X ist X^* ein Banachraum, d.h. mit der üblichen punktweisen skalaren Multiplikation und punktweisen Addition. Die Norm ist definiert als

$$\|\phi\| = \sup_{x \in X, \|x\|_X \leq 1} |\phi(x)|.$$

Oft möchte man X^* auf dem Level von X behandeln und schreibt daher

$$\phi(x) = \langle \phi, x \rangle_{X',X} = \langle \phi, x \rangle,$$

wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle : X^* \times X \to \mathbb{R}$ Dualitätsklammer genannt wird. Sie ist linear in beiden Einträgen. Von X^* kann man wieder den Dualraum betrachten, den Bidualraum $X^{**} := (X^*)^*$. Mit Hilfe dieser beiden Räume können wichtige Erkenntnisse über den Raum X gewonnen werden.

Theorem 1.5.1 (Satz von Riesz). *Sei $(H, (\cdot|\cdot))$ ein Hilbertraum. Dann gilt:*

- *Für alle $\phi \in H^*$ existiert ein eindeutiges Element $v_\phi \in H$, so dass*

$$\langle \phi, u \rangle = (v_\phi | u), \quad \forall u \in H.$$

- *Zudem gilt*
$$\|\phi\|_{H^*} = \|v_\phi\|_H.$$
- *Durch die Abbildung* $j : H^* \to H$, $\phi \mapsto v_\phi$ *ist ein isometrischer Isomorphismus gegeben.*

Man schreibt kurz $H^* = H$.

Notation: Man schreibt $\mathrm{W}^{-1}_{p'}(\Omega) := (\mathring{\mathrm{W}}^1_p(\Omega))^*$ und $\mathrm{H}^{-1}(\Omega) := (\mathring{\mathrm{W}}^1_2(\Omega))^*$. Es folgt nun

Theorem 1.5.2. *Sei* $\phi \in \mathrm{H}^{-1}(\Omega)$. *Dann existieren* $f_0, f_1, \ldots, f_N \in \mathrm{L}_2(\Omega)$ *mit*
$$\langle \phi, v\rangle = (f_0|v) + \sum_j (f_j|\partial_j v), \quad \forall v \in \mathring{\mathrm{H}}^1(\Omega).$$

Proof. Da $\mathring{\mathrm{H}}^1(\Omega)$ ein Hilbertraum ist, gibt es ein eindeutiges Element $f_\phi \in \mathring{\mathrm{H}}^1(\Omega)$, so dass
$$\langle \phi, v\rangle = (f_\phi|v) = \int_\Omega f_\phi v\,dx + \sum_j \int_\Omega D_j f_\phi \cdot D_j v\,dx, \quad \forall v \in \mathring{\mathrm{H}}^1(\Omega).$$
Die Funktionen $f_0 := f_\phi$, $f_1 := D_1 f_\phi, \ldots, f_N := D_N f_\phi$ leisten das Gewünschte. $\square$

Die Funktionen $f_0, \ldots, f_N$ sind nicht eindeutig! Das Nullelement des $\mathrm{H}^{-1}(\Omega)$, $\Omega = (0,1) \times (0,1)$ lässt sich mit $f_0 = f_1 = f_2 = 0$ und mit $f_0 = 0$, $f_1 = y$, $f_2 = x$ darstellen.

Ein ähnliches Resultat gilt für den $\mathrm{W}^{-1}_{p'}(\Omega)$. Da $(\mathrm{L}_p(\Omega))^* = \mathrm{L}_{p'}(\Omega)$, $1/p + 1/p' = 1$, $1 < p < \infty$ und insbesondere $\langle f, g\rangle = \int_\Omega fg\,dx$ gilt, kann man zusammen mit der isometrischen Einbettung $j_{iso} : \mathring{\mathrm{W}}^1_p(\Omega) \to \mathrm{L}_p(\Omega)^N$ folgende Abbildung definieren: Für ein $\phi \in \mathrm{W}^{-1}_{p'}(\Omega)$ setze
$$T := \phi \circ j_{iso}^{-1} : D(T) := j_{iso}(\mathring{\mathrm{W}}^1_p(\Omega)) \subset \mathrm{L}_p(\Omega; \mathbb{R}^{N+1}) \to \mathbb{R},$$
wobei $D(T)$ ein abgeschlossener Teilraum des $\mathrm{L}_p(\Omega; \mathbb{R}^{N+1})$ ist. Hahn-Banach liefert eine Fortsetzung $\overline{T} : \mathrm{L}_p(\Omega; \mathbb{R}^{N+1}) \to \mathbb{R}$ mit $\|\overline{T}\| = \|T\|$ und $\overline{T}_{|D(T)} = T$. Mit $(\mathrm{L}_p(\Omega))^* = \mathrm{L}_{p'}(\Omega)$ bekommt man
$$\langle \overline{T}, v\rangle = \sum_{k=0}^N \int_\Omega f_k v_k\,dx \quad \forall v = (v_0, \ldots, v_N) \in \mathrm{L}_p(\Omega; \mathbb{R}^{N+1}).$$
Insbesondere folgt für $u \in \mathring{\mathrm{W}}^1_p(\Omega)$
$$\langle \phi, u\rangle = \phi(u) = T(j_{iso}(u)) = \overline{T}(j_{iso}(u)) = \int_\Omega f_0 u\,dx + \sum_{k=1}^N \int_\Omega f_k D_k u\,dx.$$

Kapitel 2

Lineare elliptische Gleichungen und das Lemma von Lax-Milgram

Im folgenden bezeichnet Ω stets ein beschränktes Gebiet im $\mathbb{R}^N$ mit C^1-Rand $\Gamma := \partial\Omega$, $N \geq 1$. Wir behandeln in diesem Abschnitt Randwertprobleme für lineare PDEs 2. Ordnung vom Typ

$$\begin{aligned} Lu &= f, \quad x \in \Omega, \\ Ru &= g, \quad x \in \Gamma. \end{aligned}$$

Hierbei ist

$$Lu := -\sum_{i,j=1}^{N} D_j(a_{ij}(x) D_i u) + \sum_{j=1}^{n} b_j(x) D_j u + c(x) u$$

$$\text{(kurz:} \quad Lu = -\nabla\cdot(A(x)\nabla u) + b(x)\cdot\nabla u + c(x)u, \quad A = (a_{ij})_{i,j=1}^N,\ b := (b_j)_{j=1}^N)$$

ein sogenannter linearer elliptischer Differentialoperator in Divergenzform. Voraussetzungen an die Koeffizienten sind:

- a_{ij}, b_j, $c \in \mathrm{L}_\infty(\Omega)$ für alle $i, j = 1, \ldots, N$
- $A = (aij)_{i,j}$ ist symmetrisch
- A ist gleichmäßig positiv definit, d.h. es existiert ein $\lambda > 0$ mit

$$\xi^T \cdot A(x) \cdot \xi \geq \lambda |\xi|^2, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N, \quad \text{f.a. } x \in \Omega.$$

Letztere Bedingung ist eine gleichmässige Elliptizitätsbedingung. Als Randoperatoren kommen folgende in Betracht

- $Ru := u_{|\Gamma}$,
- $Ru := (A(x)\cdot\nabla u|\nu(x))_{|\Gamma}$, wobei $\nu(x)$ die Einheitsaussennormale im Punkt $x \in \Gamma$ bezeichnet,

- $Ru := \mu u_{|\Gamma} + (A(x) \cdot \nabla u | \nu(x))_{|\Gamma}$ mit $\mu \in \mathbb{R}$,
- $Ru := (R_1 u, R_2 u)$ wobei $R_1 u := u_{|\Gamma_1}$ und $R_2 u := (A(x) \cdot \nabla u | \nu(x))_{|\Gamma_2}$. Hierbei ist $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ mit $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \varnothing$ und $|\Gamma_j| > 0$, $j = 1, 2$,

Die rechten Seiten f und g sind gegeben.

2.1. RWPe mit homogener Dirichlet-Randbedingung

Als erstes behandeln wir das Randwertproblem für homogene Dirichlet Randbedingungen:

$$\begin{aligned} Lu &= f, \quad x \in \Omega, \\ u &= 0, \quad x \in \Gamma. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Um die schwache H^1-Formulierung dieses RWPs zu erhalten, nehmen wir an, dass u das Problem (2.1) im klassischen Sinne erfüllt. Multiplikation der Differentialgleichung mit einer Testfunktion $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ und partielle Integration führt zu

$$a(u, \phi) := \int_\Omega (A(x) \cdot \nabla u | \nabla \phi) + (b(x) | \nabla u)\phi + c(x) u \phi \, dx = \int_\Omega f(x) \phi \, dx. \tag{2.2}$$

Für diese Formulierung reicht es, dass $u \in \mathrm{H}^1(\Omega)$, alle Koeffizienten in $\mathrm{L}_\infty(\Omega)$ sind und $f \in \mathrm{L}_2(\Omega)$. Da ausserdem $\mathcal{D}(\Omega)$ dicht in $\mathring{\mathrm{H}}^1(\Omega)$, kann durch ein Approximationsargument die obige Integralgleichung sogar für alle $\phi \in \mathring{\mathrm{H}}^1(\Omega)$ erklärt werden. Dies motiviert

Definition 2.1.1. *Eine Funktion $u \in \mathring{\mathrm{H}}^1(\Omega)$ heißt schwache Lösung von (2.1), wenn u die Familie der Integralgleichungen (2.2) für alle $v \in \mathring{\mathrm{H}}^1(\Omega)$ erfüllt.*

Die Fragen der Existenz, Eindeutigkeit, und stetige Abhängigkeit der Anfangsdaten sollen nun beantwortet werden für

$$a(u, v) = \int_\Omega f(x) v \, dx, \quad \forall v \in \mathring{\mathrm{H}}^1(\Omega).$$

Definition 2.1.2. *Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein Banachraum, $a : X \times X \to \mathbb{R}$ eine Abbildung. Die Abbildung a heisst*

- *bilinear, falls a in jeder Komponente linear ist,*
- *symmetrisch, falls $a(x, y) = a(y, x)$ fürr alle $x, y \in X$,*
- *positiv, falls $a(x, x) \geq 0$ für alle $x \in X$,*

- *stark positiv oder koerzitiv, falls ein $\lambda > 0$ existiert, so dass*

$$a(x,x) \geq \lambda \|x\|_X, \quad \forall x \in X.$$

- *heisst beschränkt, wenn ein $M > 0$ existiert, so dass*

$$|a(u,v)| \leq M\|u\|_X\|v\|_X, \quad \forall u,v \in X.$$

Es ist offensichtlich, dass die Abbildung a, definiert in (2.2), bilinear ist. Die Abbildung a heisst auch die der Differentialgleichung zugeordnete Bilinearform. a ist symmetrisch genau dann, wenn $b = 0$ ist.

Das *Lemma von Lax Milgram* gibt ein Hilfsmittel zur Hand, das RWP (2.1) zu lösen

Lemma 2.1.1 (Lemma von Lax Milgram)**.** *Sei $(H, (\cdot|\cdot))$ ein Hilbertraum, $a : H \times H \to \mathbb{R}$ eine beschränkte, koerzitive Bilinearform. Dann gilt: Für jedes $f \in H^*$ existiert genau ein $u \in H$, so dass*

$$a(u,v) = \langle f, v\rangle_{H^*,H}, \quad \forall v \in H.$$

Bevor wir die obige Aussage beweisen, schauen wir uns noch einmal (2.2) an. Die erste Frage die auftaucht lautet: Wird durch $f \in \mathrm{L}_2(\Omega)$ ein Funktional definiert? Wir definieren dazu $j_f : \mathring{\mathrm{H}}^1(\Omega) \to \mathbb{R}$, $j_f(v) := \int_\Omega f(x)v(x)\,dx$. Offensichtlich gilt $j_f \in \mathrm{H}^{-1}(\Omega)$. Wählt man $\phi = j_f$, so kann (2.2) in die Formulierung des obigen Lemmas gebracht werden.

Es gilt weiterhin: Die Abbildung $j : \mathrm{L}_2(\Omega) \to \mathrm{H}^{-1}(\Omega)$, $f \mapsto j_f$ ist linear, stetig und injektiv. Damit erhält man $\mathrm{L}_2(\Omega) \hookrightarrow \mathrm{H}^{-1}(\Omega)$.

Definition 2.1.3. *Sei $f \in \mathrm{H}^{-1}(\Omega)$. Eine Funktion $u \in \mathring{\mathrm{H}}^1(\Omega)$ heisst schwache Lösung von (2.1), falls gilt:*

$$a(u,v) = \langle f, v\rangle_{\mathrm{H}^{-1}(\Omega),\mathring{\mathrm{H}}^1(\Omega)}, \quad \forall v \in \mathring{\mathrm{H}}^1(\Omega).$$

Beweis von Lax-Milgram. Für jedes feste $u \in H$ ist die Abb. $v \in H \mapsto a(u,v) \in \mathbb{R}$ ein stetiges, lineares Funktional auf H, d.h. ein Element in H^*. Die Linearität ergibt sich aus der Linearität von a bzgl. der 2. Komponente, die Stetigkeit folgt aus der Beschränkheit von a. Wir bezeichnen für jedes feste $u \in H$ das soeben definierte Element in H^* mit Au. Damit können wir einen Operator

$$A : H \to H^*, \quad u \mapsto Au$$

definieren, d.h.

$$\langle Au, v\rangle_{H^*,H} := a(u,v), \quad \forall v \in H.$$

A ist linear und beschränkt,

$$\|Au\|_{H^*} = \sup_{\|v\|_H \le 1} \langle Au, v\rangle_{H^*,H} \le \sup_{\|v\|_H \le 1} M\|u\|_H\|v\|_H \le M\|u\|_H, \quad \forall u \in H.$$

Wir wollen nun zeigen, dass $A : H \to H^*$ bijektiv ist, d.h. die Gleichung $Au = f$ besitzt für alle $f \in H^*$ genau eine Lösung $u \in H$. Diese Gleichung ist equivalent zu

$$u = \varepsilon jf + u - \varepsilon jAu,$$

wobei $\varepsilon > 0$ und j den Riesz-Isomorphismus bezeichnet. Setze weiter $\Phi u := \varepsilon jf + u - \varepsilon jAu$ und zeige, dass $\Phi : H \to H$ eine Kontraktion ist. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\|\Phi(u)_1 - \Phi(u_2)\|_H^2 &= (\Phi(u)_1 - \Phi(u_2)|\Phi(u)_1 - \Phi(u_2))_{H,H} \\
&= (u_1 - u_2 - \varepsilon jA(u_1 - u_2)|u_1 - u_2 - \varepsilon jA(u_1 - u_2))_{H,H} \\
&= \|u_1 - u_2\|_H^2 + \varepsilon^2\|jA(u_1 - u_2)\|_H^2 - 2\varepsilon(u_1 - u_2|jA(u_1 - u_2))_{H,H} \\
&\le \|u_1 - u_2\|_H^2 + \varepsilon^2 M^2\|u_1 - u_2\|_H^2 - 2\varepsilon\lambda\|u_1 - u_2\|_H^2 \\
&= (1 + \varepsilon(\varepsilon M - 2\lambda))\|u_1 - u_2\|_H^2.
\end{aligned}$$

Wähle nun $\varepsilon > 0$ so klein, dass $\varepsilon M - 2\lambda < 0$ und damit $1 + \varepsilon(\varepsilon M - 2\lambda) < 1$. Die Existenz und Eindeutigkeit eines Fixpunktes von Φ folgt aus dem Banach'schen Fixpunktsatz. □

Die stetige Abhängigkeit der Lösung $u = A^{-1}f$ von den Daten folgt aus:

$$\|u\|_H^2 \le \lambda^{-1}a(u,u) = \lambda^{-1}(Au|u)_H \le \lambda^{-1}\|f\|_H\|u\|_H.$$

Zurück zum Randwertproblem (2.1): Um die Existenz und Eindeutigkeit einer schwachen Lösung und deren stetige Abhängigkeit von den Daten nachzuweisen, müss überprüft werden, ob die Bilinearform a aus (2.2) beschränkt und koerzitiv ist. Es gilt:

$$\begin{aligned}
|a(u,v)| \le{}& \|A\|_{\mathrm{L}_\infty(\Omega;\mathbb{R}^{N\times N})}\|\nabla u\|_{\mathrm{L}_2(\Omega;\mathbb{R}^N)}\|\nabla v\|_{\mathrm{L}_2(\Omega;\mathbb{R}^N)} + \\
& \|b\|_{\mathrm{L}_\infty(\Omega;\mathbb{R}^N)}\|\nabla u\|_{\mathrm{L}_2(\Omega;\mathbb{R}^N)}\|v\|_{\mathrm{L}_2(\Omega)} + \\
& \|c\|_{\mathrm{L}_\infty(\Omega)}\|u\|_{\mathrm{L}_2(\Omega)}\|v\|_{\mathrm{L}_2(\Omega)} \\
\le{}& \max\{\|A\|_{\mathrm{L}_\infty(\Omega;\mathbb{R}^{N\times N})}, \|b\|_{\mathrm{L}_\infty(\Omega;\mathbb{R}^N)}, \|c\|_{\mathrm{L}_\infty(\Omega)}\}\|u\|_{\mathring{\mathrm{H}}^1(\Omega)}\|v\|_{\mathring{\mathrm{H}}^1(\Omega)}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
a(u,u) &= \int_\Omega (A(x)\nabla u|\nabla u) - \frac{1}{2}\nabla\cdot b(x)u^2 + c(x)u^2\,dx \\
&\ge \lambda\|\nabla u\|_{\mathrm{L}_2(\Omega;\mathbb{R}^N)}^2 + \int_\Omega [c(x) - \tfrac{1}{2}\nabla\cdot b(x)]u^2\,dx \\
&\ge \lambda/2\|\nabla u\|_{\mathrm{L}_2(\Omega;\mathbb{R}^N)}^2 + \lambda/2c_p^{-1}\|u\|_{\mathrm{L}_2(\Omega)}^2 + \int_\Omega [c(x) - \tfrac{1}{2}\nabla\cdot b(x)]u^2\,dx
\end{aligned}$$

wobei $c_p > 0$ die Konstante aus der Poincare Ungleichung bezeichnet. Im allgemeinen erhält man keine Koerzivität.

Theorem 2.1.1. *(i) Falls $b \in \mathrm{C}^1(\overline{\Omega})$ und $c(x) - \frac{1}{2}\nabla\cdot b(x) \geq 0$ f. ü. in Ω, dann gilt: Für alle $f \in H^{-1}(\Omega)$ existiert eine eindeutige schwache Lösung von (2.1).*

(ii) Im allgemeinen Fall gilt: Es existiert $\mu_0 > 0$, so dass für alle $\mu > \mu_0$, das Randwertproblem

$$\begin{aligned} \mu u + Lu &= f, \quad x \in \Omega, \\ u &= 0, \quad x \in \Gamma \end{aligned} \tag{2.3}$$

für alle $f \in H^{-1}(\Omega)$ eine eindeutige schwache Lösung u besitzt.

2.2. RWPe mit nicht-homogener Dirichlet-Randbedingung

Wir betrachten das RWP mit inhomogener Dirichlet-Randbedingung

$$\begin{aligned} Lu &= f, \quad x \in \Omega, \\ u &= g, \quad x \in \partial\Omega. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Um dies zu lösen, nehmen wir an es existiert eine Fortsetzung von g auf Ω, d.h. es existiert ein $\tilde{g} \in \mathrm{C}^2(\Omega) \cap \mathrm{C}(\overline{\Omega})$ mit $\tilde{g}_{|\Gamma} = g$. Dann kann die rechte Seite in der Randbedingung auf Null transformiert werden. Setzt man $v = u - \tilde{g}$, so erhält man

$$\begin{aligned} Lv &= f - L\tilde{g}, \quad x \in \Omega \\ v &= 0, \quad x \in \Gamma \end{aligned} \tag{2.5}$$

Davon leitet man die schwache Formulierung wie gehabt ab, d.h. testen mit $\phi \in \mathring{\mathrm{H}}^1(\Omega)$ und partielle Integration. Man erhält

$$\begin{aligned} a(v, \phi) &= \int_\Omega f(x)\phi(x)\,dx - \int_\Omega L\tilde{g}(x)\phi(x)\,dx \\ &= \int_\Omega f(x)\phi(x)\,dx - a(\tilde{g}, \phi), \quad \forall \phi \in \mathring{\mathrm{H}}^1(\Omega). \\ &= \langle j_f, \phi \rangle_{H^{-1}\Omega, \mathring{\mathrm{H}}^1(\Omega)} - \langle L\tilde{g}, \phi \rangle_{H^{-1}\Omega, \mathring{\mathrm{H}}^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

In dieser Formulierung sehen wir, dass $\tilde{g} \in \mathrm{H}^1(\Omega)$ ausreicht. Diese Regularität und die Fortsetzung bekommt man genau für $g \in \mathrm{H}^{1/2}(\Gamma) = T_\Gamma(\mathrm{H}^1(\Omega))$ (siehe Bemerkung 1.3.1).

Definition 2.2.1. *Sei $f \in \mathrm{H}^{-1}(\Omega)$, $g \in \mathrm{H}^{1/2}(\Gamma)$ und der Rand $\Gamma = \partial\Omega$ von der Klasse C^1. Eine Funktion $u \in \mathrm{H}^1(\Omega)$ heisst schwache Lösung von (2.4), wenn $v :=$*

$u - \tilde{g} \in \overset{\circ}{\mathrm{H}}{}^1(\Omega)$ und v schwache Lösung von (2.5), d.h.

$$a(v,\phi) := \int_\Omega (A(x)Dv|D\phi) + (b(x)|Dv)\phi + c(x)v\phi\,dx = \langle f,\phi\rangle_{\mathrm{H}^{-1}(\Omega),\mathrm{H}_0^1(\Omega)} - \langle L\tilde{g},\phi\rangle_{\mathrm{H}^{-1}(\Omega),\mathrm{H}_0^1(\Omega)}, \tag{2.6}$$

für alle $\phi \in \overset{\circ}{\mathrm{H}}{}^1(\Omega)$, wobei

$$\langle L\tilde{g},\phi\rangle_{\mathrm{H}^{-1}(\Omega),\mathrm{H}_0^1(\Omega)} = a(\tilde{g},\phi).$$

Damit bekommt man (fast) sofort

Theorem 2.2.1. *(a) Falls $b \in \mathrm{C}^1(\overline{\Omega})$ und $c(x) - \frac{1}{2}\nabla\cdot b(x) \geq 0$ f. ü in Ω, dann gilt: Für alle $f \in \mathrm{H}^{-1}(\Omega)$ und alle Randdaten $g \in \mathrm{H}^{1/2}(\Gamma)$ existiert eine eindeutige schwache Lösung von (2.4).*

(b) Im allgemeinen Fall gilt: Es existiert ein $\mu_0 > 0$, so dass für alle $\mu > \mu_0$ das RWP

$$\begin{aligned} Lu + \mu u &= f, \quad x \in \Omega, \\ u &= g, \quad x \in \partial\Omega, \end{aligned}$$

für alle $f \in \mathrm{H}^{-1}(\Omega)$ und alle Randdaten $g \in \mathrm{H}^{1/2}(\Gamma)$ eine eindeutige schwache Lösung $u \in \mathrm{H}^1(\Omega)$ besitzt.

Proof. Die Existenzaussage ist klar (folgt aus Satz 2.1.1). Es bleibt die Eindeutigkeit zu zeigen. Seien $\tilde{g}_1$, $\tilde{g}_2$ zwei Fortsetzungen von g und $u_1, u_2 \in \mathrm{H}^1(\Omega)$ die zugehörigen schwachen Lösungen von (2.4) im Sinne der Definition 2.2.1. Dann gilt: $v_j = u_j - \tilde{g}_j \in \overset{\circ}{\mathrm{H}}{}^1(\Omega)$, $j = 1,2$, sind schwache Lšoungen von (2.5) und somit genügen $u_j = v_j + \tilde{g}_j$, $j = 1,2$, den schwachen Formulierungen

$$a(u_j,\phi) = \langle f,\phi\rangle, \quad j = 1,2.$$

Subtraktion beider Gleichungen führt auf

$$a(u,\phi) = 0, \quad \forall\phi \in \overset{\circ}{\mathrm{H}}{}^1(\Omega),$$

wobei $u = u_1 - u_2$. Da nun $u = v_1 - v_2 + \tilde{g}_1 - \tilde{g}_2 \in \overset{\circ}{\mathrm{H}}{}^1(\Omega)$ und das obige Problem die eindeutige Lösung $u = u_1 - u_2 = 0$ besitzt, folgt die Eindeutigkeit. □

2.3. RWPe mit anderen Randbedingungen

Als letztes betrachten wir

$$\begin{aligned} Lu = f, &\quad x \in \Omega \\ \mu u + A(x)Du \cdot \nu = g, &\quad x \in \Gamma, \end{aligned} \tag{2.7}$$

wobei $\mu \in \mathbb{R}$ (bzw. $\mu \in \mathrm{L}_\infty(\Gamma)$). Um eine schwache Formulierung zu erhalten, testen wir die Differentialgleichung mit einem $\phi \in \mathrm{C}^\infty(\Omega)$ (also nicht mit einem $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$). Partielle Integration und benutzen der Randbedingung liefert

$$a(u, \phi) + \int_\Gamma \mu u \phi \, d\sigma(x) = \int_\Omega f \phi \, dx + \int_\Gamma g \phi \, d\sigma(x)$$

mit unserer Standardbilinearform

$$a(u, \phi) = \int_\Omega (A(x)Dv|D\phi) + (b(x)|Dv)\phi + c(x)v\phi \, dx.$$

Wegen der Dichtheit von $\mathrm{C}^\infty(\Omega)$ in $\mathrm{H}^1(\Omega)$, gelten die Integralgleichungen auch für alle $\phi \in \mathrm{H}^1(\Omega)$. Beachte: Die Stetigkeit des Spuroperators liefert die Konvergenz der Spuren $T_\Gamma \phi_n$ in $\mathrm{L}_2(\Gamma)$, s.d. auch im Randintegralterm zum Limes übergegangen werden kann. Die obigen Integralgleichungen sind sinnvoll definiert, wenn nur $u \in \mathrm{H}^1(\Omega)$ gilt.

Definition 2.3.1. *Sei $\mu \in \mathbb{R}$, $f \in (\mathrm{H}^1(\Omega))^*$, $g \in \mathrm{L}_2(\Gamma)$. Eine Funktion $u \in \mathrm{H}^1(\Omega)$ heisst schwache Lösung von (2.7), wenn*

$$a_\mu(u, v) = \Phi(v), \quad \forall v \in \mathrm{H}^1(\Omega),$$

wobei

$$a_\mu(u, v) := a(u, v) + \int_\Gamma \mu u \phi \, d\sigma, \quad \Phi(v) := \langle f, v \rangle_{(\mathrm{H}^1(\Omega))^*, \mathrm{H}^1(\Omega)} + \int_\Gamma g \phi \, d\sigma.$$

Offensichtlich ist Φ ein Element von $(\mathrm{H}^1(\Omega))^*$. Die Beschränkheit von a_μ ist ebenfalls leicht einsehbar, da der Spuroperator $T_\Gamma : \mathrm{H}^1(\Omega) \to \mathrm{L}_2(\Gamma)$ stetig ist. Die eigentlich Aufgabe besteht wieder im Nachweis der Koerzivität. Es gilt:

$$a_\mu(u, u) \geq \lambda \|\nabla u\|^2_{\mathrm{L}_2(\Omega; \mathbb{R}^N)} + \mu \int_\Gamma |u|^2 \, d\sigma + \int_\Omega c(x)|u|^2 + (b(x)|\nabla u)u \, dx$$

Für die weitere Abschätzung betrachten wir folgende Szenarios:

- $\mu > 0$, $b = 0$, $c = 0$: Koerzivität folgt mit der verallgemeinerten Poincare-Ungleichung (siehe Bem. 1.4.1).

- $\mu = 0$, $b \in \mathrm{C}^1(\Omega)$ mit $c(x) - \frac{1}{2}\nabla\cdot b(x) \geq c_0 > 0$ f.ü. und $(b(x)|\nu(x)) \geq 0$ für alle $x \in \Gamma$: Koerzivität folgt durch direkte Abschätzung nach unten.
- $\mu = 0$, $b = 0$, $c = 0$: Übung (Hinweis: Man wähle $H := \{v \in \mathrm{H}^1(\Omega) : \int_\Omega v\,dx = 0\}$ und $f \in \hat{\mathrm{L}_2(\Omega)} := \{g \in \mathrm{L}_2(\Omega) : \int_\Omega g\,dx = 0\} \subset \mathrm{L}_2(\Omega)$.
- Der allgemeine Fall kann wieder nur behandelt werden, wenn das Ausgangsproblem durch Addition des Terms κu in der Differentialgleichung modifiziert wird.

Theorem 2.3.1. *(a) Falls $\mu > 0$, $b = 0$ und $c = 0$: Für alle $f \in (\mathrm{H}^1(\Omega))^*$ und alle Randdaten $g \in \mathrm{L}_2(\Gamma)$ existiert eine eindeutige schwache Lösung von (2.7).*

(b) Falls $\mu = 0$, $b \in \mathrm{C}^1(\Omega)$ mit $c(x) - \frac{1}{2}\nabla\cdot b(x) \geq c_0 > 0$ f.ü. und $(b(x)|\nu(x)) \geq 0$ für alle $x \in \Gamma$: Für alle $f \in (\mathrm{H}^1(\Omega))^*$ und alle Randdaten $g \in \mathrm{L}_2(\Gamma)$ existiert eine eindeutige schwache Lösung von (2.7).

(c) Im allgemeinen Fall gilt: Es existiert ein $\kappa_0 > 0$, so dass für alle $\kappa > \kappa_0$ das RWP

$$\begin{aligned} Lu + \kappa u &= f, \quad x \in \Omega, \\ \mu u + (A \cdot \nabla u|\nu) &= g, \quad x \in \partial\Omega, \end{aligned}$$

für alle $f \in (\mathrm{H}^1(\Omega))^*$ und alle Randdaten $g \in \mathrm{L}_2(\Gamma)$ eine eindeutige schwache Lösung $u \in \mathrm{H}^1(\Omega)$ besitzt.

Als letztes betrachten wir gemischte Randbedingungen, d.h.

$$\begin{aligned} Lu &= f, \quad x \in \Omega \\ u &= 0, \quad x \in \Gamma_1, \\ A(x) \cdot Du \cdot \nu(x) &= 0, \quad x \in \Gamma_2, \end{aligned} \tag{2.8}$$

wobei Γ_1, Γ_2 messbare Teilmengen (positiven Masses) des Randes $\Gamma = \partial\Omega$ mit $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \varnothing$ und $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Die schwache Formulierung lautet

$$a(u, v) = \langle f, v\rangle_{V^*,V}, \quad \forall v \in V := \{\phi \in \mathrm{H}^1(\Omega) : \phi_{|\Gamma_1} = 0\}.$$

V ist ein abgeschlossener linearer Teilraum des $\mathrm{H}^1(\Omega)$t, und somit mit dem Skalarprodukt des Raumes $\mathrm{H}^1(\Omega)$ wieder ein Hilbertraum. Die Neumann-Randbedingung auf Γ_2 ist in der Bilinearform enthalten.

Definition 2.3.2. *Sei $V := \{\phi \in \mathrm{H}^1(\Omega) : \phi_{|\Gamma_1} = 0\}$ und $f \in V^*$. Eine Funktion $u \in V$ heisst schwache Lösung von (2.8), wenn*

$$a(u, v) = \langle f, v\rangle_{V^*,V}, \quad \forall v \in V.$$

Es gilt der folgende Satz.

Theorem 2.3.2. *(a) Falls* $b \in C^1(\Omega)$ *mit* $c(x) - \frac{1}{2}\nabla \cdot b(x) \geq 0$ *f.ü. und* $(b(x)|\nu(x)) \geq 0$ *für alle* $x \in \Gamma_2$*: Für alle* $f \in V^*$ *existiert eine eindeutige schwache Lösung von* (2.8).

(b) Im allgemeinen Fall gilt: Es existiert ein $\kappa_0 > 0$*, so dass für alle* $\kappa > \kappa_0$ *das RWP*

$$\begin{aligned} Lu + \kappa u &= f, \quad x \in \Omega, \\ u &= 0, \quad x \in \Gamma_1, \\ (A \cdot \nabla u|\nu) &= 0, \quad x \in \Gamma_2, \end{aligned}$$

für alle $f \in V^*$ *eine eindeutige schwache Lösung* $u \in V$ *besitzt.*

Teil II.

Nichtlineare Theorie — Lösungsmethoden für nichtlineare elliptische Gleichungen

3.1. Nichtlineare elliptische RWPe mit stark monotonem Operator

Zur Erinnerung: Lax-Milgram hat gezeigt, dass zwei Eigenschaften die Bijektivität eines linearen Operators $A : V \to V^*$ garantieren:

- A ist beschränkt. Da A linear war, folgt sofort die (Lipschitz) Stetigkeit von A.
- A erfüllt die Abschätzung

$$\langle A(u-v), u-v\rangle_{V^*,V} = \langle Au - Av, u-v\rangle_{V^*,V} \geq \lambda \|u-v\|_V^2, \quad \forall u,v \in V.$$

Definition 3.1.1. *Sei $(V, \|\cdot\|_V)$ ein Banachraum, $A : V \to V^*$ ein Operator. Dann heisst A*

(i) Lipschitz-stetig, wenn ein $L > 0$ existiert, so dass

$$\|A(u) - A(v)\|_{V^*} \leq L\|u-v\|_V, \quad \forall u,v \in V.$$

(ii) stark monoton, wenn ein $\lambda > 0$ existiert, so dass

$$\langle A(u) - A(v), u-v\rangle_{V^*,V} \geq \lambda\|u-v\|_V^2, \quad \forall u,v \in V.$$

Theorem 3.1.1 (Zarantonello). *Sei $(H, (\cdot|\cdot))$ ein Hilbertraum und $A : H \to H^*$ Lipschitz-stetig und stark monoton. Dann ist A bijektiv.*

Proof. A bijektiv bedeutet: $\forall f \in H^*$ $\exists! u \in H$: $A(u) = f$. Wir schreiben diese Gleichung wieder als Fixpunktgleichung

$$u = \varepsilon j f + u - \varepsilon j A(u) =: \Psi_\varepsilon(u),$$

wobei $\varepsilon > 0$ beliebig ist und $j : H^* \to H$ den Riesz-Isomorphismus bezeichnet. Damit gilt sofort: $\Psi_\varepsilon : H \to H$, also eine Selbstabbildung. Die Kontraktion bekommt man ebenfalls leicht:

$$\begin{aligned}
\|\Psi_\varepsilon(u_1) - \Psi_\varepsilon(u_1)\|_H^2 &= \|u_1 - u_2 - \varepsilon j[A(u_1) - A(u_2)]\|_H^2 \\
&= \|u_1 - u_2\|_H^2 + \varepsilon^2\|A(u_1) - A(u_2)\|_{H^*}^2 \\
&\quad - 2\varepsilon(u_1 - u_2 | j[A(u_1) - A(u_2)])_{H,H} \\
&= \|u_1 - u_2\|_H^2 + \varepsilon^2\|A(u_1) - A(u_2)\|_{H^*}^2 \\
&\quad - 2\varepsilon\langle A(u_1) - A(u_2), u_1 - u_2\rangle_{H^*,H} \\
&\leq \|u_1 - u_2\|_H^2 + \varepsilon^2 L\|u_1 - u_2\|_H^2 - 2\varepsilon\lambda\|u_1 - u_2\|_H^2 \\
&= (1 + \varepsilon^2 L - 2\varepsilon\lambda)\|u_1 - u_2\|_H^2,
\end{aligned}$$

wobei $1 + \varepsilon^2 L - 2\varepsilon\lambda < 1$ für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$. □

Beispiel 3.1.1. Wir betrachten das Randwertproblem (2.1) mit genügend kleiner Störung $\Phi(x, u)$, d.h.

$$\begin{aligned} -\nabla\cdot(a(x)\cdot\nabla u) + \Phi(x,u) &= f, \quad x\in\Omega,\\ u &= 0, \quad x\in\partial\Omega. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Wir werden sehen, dass für Störungen 0-ter Ordnung ($\Phi(x, u)$) der Satz von Zarantonello angewendet werden kann. Hinreichende Bedingungen an Φ:

- $\Phi : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig;
- Φ ist gleichmäßig Lipschitz stetig in der 2. Variablen, d.h.

$$\exists L > 0 : \quad |\Phi(x,r) - \Phi(x,s)| \le L|r-s| \quad \forall x\in\overline{\Omega},\ \forall r,s\in\mathbb{R};$$

- Φ ist monoton wachsend bzgl. der 2. Variable, d.h.

$$[\Phi(x,r) - \Phi(x,s)]\cdot(r-s) \ge 0, \quad \forall x\in\overline{\Omega},\ \forall r,s\in\mathbb{R}.$$

Wir leiten nun die schwache Formulierung des Randwertproblems (3.9) her. Die richtige Wahl für den Lösungsraum ist $V := \overset{\circ}{\mathrm{H}}{}^1_2(\Omega)$ und mit $\mathcal{A}_1 : V \to V^*$, definiert durch

$$\langle \mathcal{A}_1(u), v\rangle_{V^*,V} := \int_\Omega (a(x)\nabla u|\nabla v) + \Phi(x,u)v\,dx, \quad \forall v\in V,$$

bekommt man die schwache Formulierung

$$\langle \mathcal{A}_1(u), v\rangle_{V^*,V} = \langle f, v\rangle_{V^*,V}, \quad \forall v\in V.$$

Es gilt in der Tat $\mathcal{A}_1(u) \in V^*$, da

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}_1(u), v\rangle_{V^*,V} &\le \|a\|_{\mathrm{L}_\infty(\Omega;\mathbb{R}^{N\times N})}\|u\|_V\|v\|_V + L\int_\Omega |u-0||v|\,dx + \int_\Omega |\Phi(x,0)v|\,dx\\ &\le (\|a\|_{\mathrm{L}_\infty(\Omega;\mathbb{R}^{N\times N})} + L)\|u\|_V\|v\|_V + \|\Phi(\cdot,0)\|_{\mathrm{C}(\overline{\Omega})}\|v\|_{\mathrm{L}_1(\Omega)}\\ &\le C_1\|u\|_V\|v\|_V + C_2\|v\|_V < \infty. \end{aligned}$$

Die schwache Formulierung von (3.9) ist äquivalent zu $\mathcal{A}_1(u) = f$ in V^*. Die Voraussetzungen an Φ und die typ. Voraussetzungen an die Matrix a, d.h.

- $a \in \mathrm{L}_\infty(\Omega; \mathbb{R}^{N\times N})$
- $\exists\lambda_0 > 0$: $(a(x)\cdot\xi|\xi) \ge \lambda_0|\xi|^2$ für alle $\xi\in\mathbb{R}^N$, f.a. $x\in\Omega$,

implizieren die Voraussetzungen des Satzes von Zarantonello. In der Tat gilt

$$\|\mathcal{A}_1(u) - \mathcal{A}_1(v)\|_{V^*} = \sup_{\|\phi\|_V\le 1} \langle \mathcal{A}_1(u) - \mathcal{A}_1(v), \phi\rangle_{V^*,V}$$

$$\leq \|a\|_{\mathrm{L}_\infty(\Omega;\mathbb{R}^{N\times N})}\|u-v\|_V\|\phi\|_V + L\|u-v\|_V,$$

sowie

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{A}_1(u)-\mathcal{A}_1(v), u-v\rangle_{V^*,V} &= \int_\Omega (a(x)\nabla[u-v]|\nabla[u-v])\,dx \\ &\quad + \int_\Omega [\Phi(x,u)-\Phi(x,v)]\cdot[u-v]\,dx \\ &\geq c(\lambda_0)\|u-v\|_V^2 + 0. \quad (\text{ Poincare Ungleichung }),\end{aligned}$$

d.h. $\mathcal{A}_1$ ist Lipschitz-stetig und stark monoton. Der Satz 3.1.1 liefert die Existenz und Eindeutigkeit einer schwachen Lösung $u \in \overset{\circ}{\mathrm{H}}{}^1_2(\Omega)$. Diese Lösung hängt stetig von f ab. Setze dazu $g(x) := f(x) - \Phi(x,0)$ und da Φ stetig ist, gilt $g \in V^*$. Weiterhin haben wir

$$c(\lambda_0)\|u\|_V^2 \leq \langle \mathcal{A}_1(u)-\mathcal{A}_1(0), u-0\rangle_{V^*,V} \leq \|g\|_{V^*}\|u\|_V,$$

d.h. $\|u\|_V \leq c(\lambda_0)^{-1}\|f-\Phi(\cdot,0)\|_{V^*}$.

3.2. Ein Exkurs in die Funktionalanalysis

Zur Erinnerung:
Sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein reeller normierter Raum. Der Dualraum von X ist die Menge $X^* := \{f : X \to \mathbb{R} | f \text{ist linear und stetig}\} = \mathcal{L}(X,\mathbb{R})$, d.h.

$$f \in X^* \quad \Leftrightarrow \quad f : X \to \mathbb{R} \quad \text{ist linear und } \exists K > 0 : \quad |f(x)| \leq K\|x\|_X, \quad \forall x \in X.$$

Der Raum X^* ausgestattet mit der Norm

$$\|f\|_{X^*} := \sup_{\|x\|_X \leq 1} |f(x)|$$

ist stets ein Banachraum.

Der algebraische Dualraum, d.h. die Menge aller linearen Funktionale $f : X \to \mathbb{R}$, ist vom topologischen Dualraum X^* zu unterscheiden: Wenn $\dim X = \infty$, dann existiert stets ein lineares unbeschränktes Funktional.

Theorem 3.2.1 (Hahn-Banach)**.** *Seien Y ein linearer Teilraum des normierten linearen Raumes $(X, \|\cdot\|_X)$, $f : Y \to \mathbb{R}$ linear und stetig. Dann gibt es eine lineare und stetige Fortsetzung $F : X \to \mathbb{R}$ von f mit*

$$F_{|Y} = f, \quad \|F\|_{X^*} = \|f\|_{Y^*}.$$

Der Bidualraum X^* von X ist per Definition der Dualraum von $(X^*, \|\cdot\|_{X^*})$, kurz: $X^{**} := (X^*)^*$. Der Raum X^{**} ausgestattet mit der Norm

$$\|\phi\|_{X^{**}} = \sup_{\|x^*\|_{X^*}\leq 1} |\langle \phi, x^* \rangle_{X^{**},X^*}|$$

ist wieder ein Banachraum. Interessant ist nun, dass jeder Banachraum X kanonisch in seinen Bidualraum X^{**} eingebettet werden kann. Definiere dazu für jedes $x \in X$ die Abbildung

$$j_x : X^* \to \mathbb{R}, \quad \phi \mapsto \langle j_x, \phi \rangle_{X^{**},X^*} = \langle \phi, x \rangle_{X^*,X}.$$

j_x ist ein stetiges, lineares Funktional auf X^* (einfaches nachrechnen). Damit können wir folgende Abbildung definieren

$$J : X \to X^{**}, \quad x \mapsto j_x.$$

J ist wieder linear und es gilt

$$\begin{aligned} \|J(x)\|_{X^{**}} &= \sup_{\|x^*\|_{X^*}\leq 1} |\langle j_x, x^* \rangle_{X^{**},X^*} \\ &= \sup_{\|x^*\|_{X^*}\leq 1} |\langle x^*, x \rangle_{X^*,X} = \|x\|_X. \end{aligned}$$

Die Abbildung J ist isometrisch (und daher insbesondere injektiv); X ist stetig in X^{**} eingebettet und kann als Teilraum aufgefasst werden.

Definition 3.2.1 (Reflexivität)**.** *Ein normierter Vektorraum $(X, \|\cdot\|)$ heisst reflexiv, wenn die kanonische Abbildung surjektiv ist, d.h. $J(X) = X$.*

Bemerkung 3.2.1. 1. Da X^{**} als Dualraum vollständig ist, ist jeder reflexive Vektorraum X vollständig.
2. Ist X reflexiv, so kann X mit X^{**} identifiziert werden. Achtung: Die Umkehrung gilt nicht!

Theorem 3.2.2. *$(X, \|\cdot\|_X)$ ist reflexiv genau dann, wenn $(X^*, \|\cdot\|_{X^*})$ reflexiv ist.*

In einem Banachraum kann mit Hilfe des Dualraumes ein neuer Konvergenzbegriff definiert werden, der schwächer ist als der Normkonvergenzbegriff.

Definition 3.2.2 (schwache Konvergenz)**.** *Sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein Banachraum. Eine Folge $(x_n)_n \subset X$ konvergiert schwach gegen $x \in X$, wenn gilt:*

$$\forall x^* \in X^* : \quad \lim_{n\to\infty} \langle x^*, x_n \rangle_{X^*,X} = \langle x^*, x \rangle_{X^*,X}.$$

Notation: $x_n \rightharpoonup x$ in X. Das Element x heisst schwacher Grenzwert von $(x_n)_n$.

Bemerkung 3.2.2. 1. Der schwache Grenzwert einer schwach konvergenten Folge ist eindeutig.

2. Wenn $x_n \rightharpoonup x$ in X, dann konvergiert auch jede beliebige Teilfolge schwach gegen x in X.

3. $x_n \to x$ in $X \Rightarrow x_n \rightharpoonup x$ in X.

4. Falls $x_n \rightharpoonup x$ in X, dann folgt

$$(x_n)_n \quad \text{ist beschränkt}, \quad \|x\|_X \leq \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|_X.$$

5. Falls $x_n \rightharpoonup x$ in X, $\|x_n\|_X \to \|x\|_X$ und X ist ein Hilbertraum, dann $x_n \to x$ in X.

6. Folgende Aussagen sind äquivalent:
   - $x_n \rightharpoonup x$ in X
   - $(x_n)_n$ ist beschränkt und $\langle x^*, x_n\rangle_{X^*,X} \to \langle x^*, x\rangle_{X^*,X}$ für alle $x^* \in M \subset X^*$, wobei $\overline{lin(M)} = X^*$.

7. Falls $\dim X < \infty$, dann fallen die Begriffe der schwachen und der starken Konvergenz zusammen.

8. Falls $x_n \rightharpoonup x$ in X und $x_n^* \to x^*$ in X^* oder $x_n \to x$ in X und $x_n^* \rightharpoonup x^*$ in X^*, dann

$$\langle x_n^*, x_n\rangle_{X^*,X} \to \langle x^*, x\rangle_{X^*,X}.$$

   Dies folgt aus den Ungleichungen

$$\begin{aligned}
|\langle x_n^*, x_n\rangle_{X^*,X} - \langle x^*, x\rangle_{X^*,X}| &\leq |\langle x_n^* - x^*, x_n\rangle_{X^*,X}| + |\langle x^*, x_n - x\rangle_{X^*,X}| \\
&\leq \|x_n\|_X \|x_n^* - x^*\|_{X^*} + |\langle x^*, x_n - x\rangle_{X^*,X}|,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|\langle x_n^*, x_n\rangle_{X^*,X} - \langle x^*, x\rangle_{X^*,X}| &\leq |\langle x_n^*, x_n - x\rangle_{X^*,X}| + |\langle x_n^* - x^*, x\rangle_{X^*,X}| \\
&\leq \|x_n^*\|_{X^*} \|x_n - x\|_X + |\langle x_n^* - x^*, x\rangle_{X^*,X}| \\
&= \|x_n^*\|_{X^*} \|x_n - x\|_X + |\langle j_x, x_n^* - x^*\rangle_{X^{**},X^*}|
\end{aligned}$$

   und der 4. Aussage.

9. Ist $(x_n)_n \subset M$, wobei M eine abgeschlossene konvexe Teilmenge von X ist und $x_n \rightharpoonup x$ in X, dann gilt schon $x \in M$.

Auf dem Dualraum X^* kann auch eine schwache Konvergenz definiert werden. Diese wird durch den Bidualraum erzeugt: seien $(x_n^*)_n, x^* \in X^*$, dann

$$x_n^* \rightharpoonup x^* \quad \text{in } X^* \quad \Leftrightarrow \quad \langle x^{**}, x_n^*\rangle_{X^{**},X^*} \to \langle x^{**}, x^*\rangle_{X^{**},X^*} \quad \forall x^{**} \in X^{**}.$$

Auf einem Dualraum X^* kann aber noch ein weiterer verallgemeinerter Konvergenzbegriff erklärt werden.

Definition 3.2.3 (schwache* Konvergenz). *Sei $(X^*, \|\cdot\|_{X^*})$ der Dualraum des normierten Vektorraumes $(X, \|\cdot\|_X)$. Eine Folge $(x_n^*)_n \subset X^*$ konvergiert schwach∗ gegen $x^* \in X^*$ genau dann, wenn gilt:*

$$\forall x \in X : \quad \lim_{n\to\infty} \langle x_n^*, x\rangle_{X^*,X} = \langle x^*, x\rangle_{X^*,X}.$$

Notation: $x_n^* \overset{*}{\rightharpoonup} x^*$ in X^*.

Falls X reflexiv ist, fallen die Begriffe der schwachen Konvergenz und der schwach-∗ Konvergenz zusammen, d.h.

$$x_n^* \rightharpoonup x^* \quad \text{in } X^* \quad \Leftrightarrow \quad x_n^* \overset{*}{\rightharpoonup} x^* \quad \text{in } X^*.$$

Theorem 3.2.3 (Alaoglu). *Sei X normiert und separabel. Auf X^* existiert eine translationsinvariante Metrik d mit folgenden Eigenschaften:*

(a) Für beschränkte Folgen $(\phi_n)_n \subset X^*$ und $\phi \in X^*$ gilt:

$$\phi_n \overset{*}{\rightharpoonup} \phi \quad \Leftrightarrow \quad d(\phi_n, \phi) \to 0.$$

Also ist die Konvergenz von beschränkten Folgen bzgl. d in X^* die schwach∗-Konvergenz.

(a) Für $K^* := \{\phi \in X^* : \|\phi\|_{X^*} \leq 1\}$ ist (K^*, d) kompakt.

Korollar 3.2.1. *Sei X ein separabler normierter Raum. Dann besitzt jede in X^* beschränkte Folge $(f_n)_n$ eine schwach∗-konvergente Teilfolge.*

Proof. Sei $M := \sup_n \|\phi_n\|_{X^*} < \infty$. Dann ist $(M^{-1}\phi_n)_n$ eine Folge in K^*. Mit der Metrik d aus dem Satz von Alaoglu ist (K^*, d) kompakt. Also existiert eine bzgl. d konvergente Teilfolge $(M^{-1}\phi_{n_j})_j$, die wieder mit dem Satz von Alaoglu schwach∗-konvergent ist. Damit ist $(\phi_{n_j})_j$ schwach∗- konvergent. □

Theorem 3.2.4 (Eberlein-Smulian). *Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein Banachraum. Dann gilt:*

X ist reflexiv. $\Leftrightarrow$ Jede beschränkte Folge besitzt eine schwach konvergente Teilfolge.

Lemma 3.2.1 (Teilfolgenprinzip). *Sei X ein reflexiver Banachraum. Besitzen alle schwach konvergenten Teilfolgen einer beschränkten Folge $(x_n)_n \subset X$ ein und denselben Limes $x \in X$, dann konvergiert die gesamte Folge $(x_n)_n$ schwach gegen x in X.*

Widerspruchsbeweis. Angenommen, $(x_n)_n$ konvergiert nicht schwach gegen $x \in X$. Dann existiert ein $\delta > 0$ und eine Folge $(n_k)_k$ mit $n_k \to \infty$ und ein $x^* \in X^*$, so dass

$$|\langle x^*, x_{n_k} - x\rangle_{X^*,X}| \geq \delta, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Andererseits ist $(x_{n_k})_k$ beschränkt, so dass eine Teilfolge $(x_{n'_k})_k$ existiert, die schwach konvergent ist (Theorem 3.2.4). Nach Voraussetzung ist der schwache Limes gleich x. Dies steht jedoch im Widerspruch zur obigen Ungleichung. □

Lemma 3.2.2 (Teilfolgenprinzip*)**.** *Sei X ein separabler normierter Raum. Besitzen alle schwach∗-konvergenten Teilfolgen einer beschränkten Folge $(f_n)_n \subset X^*$ ein und denselben Limes $f \in X^*$, dann konvergiert die gesamte Folge $(f_n)_n$ schwach∗ gegen f in X^*.*

Beispiel 3.2.1. Im Banachraum $X = \mathrm{L}_1(\Omega)$, $\Omega = (0,1)$, betrachten wir die Funktionenfolge $(u_n)_n$ definiert durch

$$u_n := \begin{cases} n(1-nx) & x \in (0, 1/n] \\ 0 & x \in (1/n, 1) \end{cases}.$$

Dann gilt

$$\|u_n\|_{\mathrm{L}_1((0,1))} = \frac{1}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$
$$\langle \phi, u_n \rangle_{X^*,X} = \int_0^1 u_n \phi \, dx \to 0, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

da zu jedem ϕ ein $n_0(\phi) \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $\operatorname{supp} \phi \cap (0, 1/n) = \varnothing$ für alle $n \geq n_0$. Angenommen die Folge u_n ist schwach konvergent, d.h. es gibt ein $u \in \mathrm{L}_1(\Omega)$ mit

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega u_n(x)\phi(x) \, dx = \int_\Omega u(x)\phi(x) \, dx, \quad \forall \phi \in \mathrm{L}_\infty(\Omega) = X^*.$$

Für $\phi \in \mathcal{D}(\Omega) \subset \mathrm{L}_\infty(\Omega)$ wissen wir jedoch, dass $\int_\Omega u\phi \, dx = 0$, d.h. aber $u = 0$. Andererseits gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega u_n(x) \cdot 1 \, dx = \frac{1}{2} \neq 0 = \int_\Omega u(x) \cdot 1 \, dx.$$

Somit ist u_n nicht schwach konvergent. Mit gleicher Argumentation folgt dies auch für jede Teilfolge. Schlussfolgerung: $\mathrm{L}_1(\Omega)$ ist nicht reflexiv.

Beispiel 3.2.2. Diesmal sei $X = \mathrm{L}_\infty(\Omega)$, $\Omega = (0,1)$ und

$$u_n(x) := \begin{cases} 1 - nx & x \in (0, 1/n] \\ 0 & x \in (1/n, 1) \end{cases}.$$

Es gilt $\|u_n\|_\infty = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und für $m < n$

$$\|u_n - u_m\|_\infty = \operatorname*{esssup}_{x\in\Omega} |u_m(x) - u_n(x)| = |u_m(x) - u_n(x)|_{x=1/n} = 1 - \frac{m}{n}.$$

Für $n = 2m$ gilt dann $\|u_m - u_n\|_X = 1/2$, also keine CF. Es gilt aber $X = (\mathrm{L}_1(\Omega))^*$ und $\mathrm{L}_1(\Omega)$ ist separabel. Damit besitzt u_n eine schwach$*$-konvergente Teilfolge. Sei u der schwach$*$-Grenzwert. Es gilt: für $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ ist $\phi \in X^*$, $\langle \phi, u\rangle_{X^*,X} = \int_\Omega \phi u \, dx$, und damit

$$\langle \phi, u_{n_k}\rangle_{X^*,X} = \int_\Omega u_{n_k}(x)\phi(x)\, dx = \int_0^{1/n_k} (1 - n_k x)\phi(x)\, dx = 0, \quad \forall k \geq k_0(\phi),$$

wobei k_0 entsprechend gewählt wird. Der Grenzwert muss wieder $u = 0$ sein. Für alle anderen schwach$*$ konvergenten Teilfolgen gilt dies ebenfalls, d.h. deren schwach$*$-Grenzwert ist immer $u = 0$. Mit Lemma 3.2.2 muss aber schon die gesamte Folge schwach$*$ gegen $u = 0$ konvergieren.

Für die Untersuchung von PDEs ist es oft nützlich verschiedene Banachräume für ein und dasselbe Problem zu betrachten. Seien $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ zwei Banachräume, wobei $X \hookrightarrow Y$ gelte. Dann folgt aber: $\forall f \in Y^*$ ist $f_{|X} \in X^*$. Ist die Einbettung sogar dicht, dann ist die Abb.

$$J : Y^* \to X^*, \quad f \to f_{|X}$$

surjektiv, denn seien $f, g \in Y^*$ mit $f \neq g$ und $f_{|X} = g_{|X}$. Dann gilt

$$0 = \langle f_{|X} - g_{|X}, x\rangle_{X^*,X} = \langle f - g, Y^*, Y\rangle \quad \forall x \in X.$$

Da $X \overset{*}{\hookrightarrow} Y$ folgt schon $\langle f - g, y\rangle_{Y^*,Y} = 0$ für alle $y \in Y$, d.h. aber $f = g$. Schlussfolgerung; $X \hookrightarrow^d Y \Rightarrow Y^* \hookrightarrow X^*$
Darüberhinaus gilt: $X \hookrightarrow^d Y$ und X reflexiv $\Rightarrow Y^* \hookrightarrow^d X^*$

3.3. Monotonie und Fixpunktmethoden

Lipschitz-Stetigkeit eines nichtlinearen Operators $A : V \to V^*$ ist eine sehr starke Annahme, die abgeschwächt werden soll, so dass A noch surjektiv sein kann.

Unser Ziel ist es, geeignete Monotonie- und Stetigkeitsbedingungen für einen nichtlinearen Operator $A : V \to V^*$ in einem unendlich-dimensionalen Banachraum V zu finden, so dass analoge Resultate gelten.

Definition 3.3.1. *Sei $(V, \|\cdot\|_V)$ ein Banachraum, $A : V \to V^*$ ein nichtlinearer Operator. Dann heisst A*

- *monoton, wenn $\langle A(u) - A(v), u - v\rangle_{V^*,V} \geq 0$ für alle $u, v \in V$;*
- *strikt monoton, wenn $\langle A(u) - A(v), u - v\rangle_{V^*,V} > 0$ für alle $u, v \in V$ mit $u \neq v$;*
- *koerzitiv, wenn*

$$\frac{\langle A(u), u\rangle_{V^*,V}}{\|u\|_V} \to \infty, \quad \textit{falls} \quad \|u\|_V \to \infty.$$

Bemerkung 3.3.1. (a) Es gelten die Implikationen: A stark monoton $\Rightarrow$ A strikt monoton $\Rightarrow$ A monoton.

(b) A stark monoton $\Rightarrow$ A koerzitiv. Denn

$$\begin{aligned}\frac{\langle A(u), u\rangle_{V^*,V}}{\|u\|_V} &= \frac{\langle A(u)-A(0), u\rangle_{V^*,V}}{\|u\|_V} + \frac{\langle A(0), u\rangle_{V^*,V}}{\|u\|_V}\\ &\geq \lambda\|u\|_V - \|A(0)\|_{V^*}\\ &\to \infty, \quad \text{falls} \quad \|u\|_V \to \infty.\end{aligned}$$

(c) Für den endlich-dimensionalen Fall $V = V^* = \mathbb{R}$ und $A := g$ mit einem $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt

- A ist monoton, genau dann wenn g monoton wachsend ist.
- A ist strikt monoton, genau dann wenn g strikt monoton wachsend auf $\mathbb{R}$ ist.
- A ist koerzitiv, genau dann wenn $\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \pm\infty$.

Beispiel 3.3.1. Wir betrachten das Beispiel

$$\begin{aligned}-\nabla\cdot(a(x)\nabla u) + \Phi(x,u) = f, &\quad x \in \Omega,\\ u = 0, &\quad x \in \partial\Omega =: \Gamma.\end{aligned} \tag{3.10}$$

mit $a \in \mathrm{L}_\infty(\Omega; \mathbb{R}^{N\times N})$, dass gleichmässig positiv definit ist, d.h. es existiert ein $\lambda > 0$ mit $(a(x)\cdot\xi|\xi) \geq \lambda|\xi|^2$ für alle $\xi \in \mathbb{R}^N$ und f.a. $x \in \Omega$. Weiterhin sei $\Phi : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Die schwache Formulierung lautet

$$b_1(u,v) := \int_\Omega (a(x)\nabla u|\nabla v) + \Phi(x,u)v\,dx = \int_\Omega f(x)v\,dx,$$

wobei $v \in V := \mathring{\mathrm{H}}^1(\Omega)$. Mit dieser Form bekommt man $\mathcal{A}_1 : V \to V^*$ definiert durch $\langle \mathcal{A}_1(u), v\rangle_{V,V^*} := b_1(u,v)$. Für beliebige Φ ist $\mathcal{A}_1$ weder monoton noch koerzitiv. Setzt man die Monotonie von Φ bzgl. der 2. Variable voraus, dann ist $\mathcal{A}_1$ schon stark monoton und auch koerzitiv.

Beispiel 3.3.2. Wir betrachten eine Koeffizientenmatrix mit u-Abhängigkeit, d.h.

$$\begin{aligned}-\nabla\cdot(a(x,u)\nabla u) + \Phi(x,u) = f, &\quad x \in \Omega,\\ u = 0, &\quad x \in \Gamma.\end{aligned} \tag{3.11}$$

Wir wollen voraussetzen, dass die Koeffizientenmatrix $a : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{N\times N}$ vom Caratheodory-Typ ist, d.h.

- $\forall r \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $a(\cdot, r)$ messbar,
- für f.a. $x \in \Omega$ ist die Funktion $a(x,\cdot)$ stetig.

Weiterhin gelte wieder $a \in \mathrm{L}_\infty(\Omega;\mathbb{R}^{N\times N})$. Unter dieser Voraussetzung gibt es eine schwache Formulierung von (3.11),

$$b_2(u,v) := \int_\Omega (a(x,u)\cdot\nabla u|\nabla v) + \Phi(x,u)v\,dx = \langle f,v\rangle_{X^*,X}, \quad \forall v\in V,$$

wobei $V = \overset{\circ}{\mathrm{H}}{}^1(\Omega)$. Die Form definiert wieder einen nichtlinearen Operator $\mathcal{A}_2 : V \to V^*$ gemäß

$$\langle \mathcal{A}_2(u), v\rangle_{V^*,V} := b_2(u,v).$$

Ohne zusätzliche Voraussetzungen ist $\mathcal{A}_2$ weder monoton noch koerzitiv. Es gelte weiter

$$\exists \lambda > 0: \quad (a(x,u)\cdot\xi|\xi) \geq \lambda|\xi|^2, \quad \forall \xi\in\mathbb{R}^N, \text{ f. a. } x\in\Omega,\ \forall u\in\mathbb{R}.$$

Dann ist $\mathcal{A}_2$ koerzitiv, aber nicht monoton.

Beispiel 3.3.3. Wir betrachten den p-Laplace, d.h.

$$\begin{aligned} -\nabla\cdot(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) &= f, \quad x\in\Omega,\\ u &= 0, \quad x\in\Gamma=\partial\Omega. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Wähle diesmal $V = \overset{\circ}{\mathrm{H}}{}^1_p(\Omega)$ und $f\in V^*$. Die schwache Formulierung lautet

$$b_3(u,v) := \int_\Omega (|\nabla u|^{p-2}\nabla u|\nabla v)\,dx = \langle f,v\rangle_{V^*,V}, \quad \forall v\in V.$$

Wir betrachten die Abbildung $b_3 : V\times V\to\mathbb{R}$ und den dadurch definierten nichtlinearen Operator $\mathcal{A}_3 : V\to V^*$, d.h. $\langle\mathcal{A}_3(u),v\rangle_{V^*,V} := b_3(u,v)$. Da

$$|b_3(u,v)| \leq \int_\Omega |\nabla u|^{p-1}|\nabla v|\,dx \leq \|\nabla u\|^{p-1}_{\mathrm{L}_p(\Omega;\mathbb{R}^N)}\|v\|_{\mathrm{L}_p(\Omega;\mathbb{R}^N)} < \infty$$

gilt, ist $\mathcal{A}_3$ wohldefiniert. Der Operator $\mathcal{A}_3$ ist strikt monoton und koerzitiv.

Als nächstes werden geeignete Stetigkeitsbegriffe für nichtlineare Operatoren eingeführt.

Definition 3.3.2. *Seien X, Y Banachräume, $M\subset X$ eine nicht-leere Teilmenge, $A : M\to Y$ ein Operator. Dann heisst A*

- *beschränkt, wenn A beschränkte Teilmengen von M in beschränkte Teilmengen von Y abbildet;*
- *stetig, wenn*

$$(u_n)_n\subset M, u\in M,\ u_n\to u \text{ in } X \quad\Rightarrow\quad A(u_n)\to A(u) \text{ in } Y;$$

- *kompakt, wenn A stetig ist und ausserdem A beschränkte Teilmengen von M in relativ kompakte Teilmengen von Y abbildet.*

Bemerkung 3.3.2. 1. Falls $A \in \mathcal{L}(X,Y)$: A beschränkt $\Leftrightarrow$ A stetig.

2. $\dim Y < \infty$: A ist stetig und beschränkt genau dann, wenn A kompakt.

3. $\dim X < \infty$ und M abgeschlossene Teilmenge von X: A stetig $\Leftrightarrow$ A kompakt.

Fixpunktmethoden spielen auch eine wichtige Rolle beim Lösen von partiellen Differentialgleichungen. Es folgen zwei wichtige Fixpunktsätze.

Theorem 3.3.1 (Brouwer)**.** *Jede stetige Abbildung $\Psi : \overline{B_1(0)} \subset \mathbb{R}^N \to \overline{B_1(0)} \subset \mathbb{R}^N$ besitzt mindestens einen Fixpunkt, wobei $\overline{B_1(0)} := \{x \in \mathbb{R}^N : \|x\|_{\mathbb{R}^N} \leq 1\}$.*

Der Satz von Brouwer gilt auch für allgemeine kompakte, konvexe Mengen des $\mathbb{R}^N$, sowie für Banachräume X mit $\dim X < \infty$.

Beispiel 3.3.4. Ein Gegenbeispiel im unendlich-dimensionalen Banachraum $X = l_2(\mathbb{N}_0)$. Betrachte folgende Abbildung $\Phi : \overline{B_1(0)} \to \overline{B_1(0)}$ definiert durch

$$x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \mapsto \Phi(x) = (\sqrt{1 - \|x\|^2_{l_2(\mathbb{N})}}, x_0, x_1, \ldots).$$

Man sieht leicht, dass

$$\|\Phi(x)\|_{l_2(\mathbb{N}_0)} = 1 - \|x\|^2_{l_2(\mathbb{N}_0)} + \|x\|^2_{l_2(\mathbb{N})} = 1, \quad \forall x \in \overline{B_1(0)}.$$

Dies zeigt, dass Φ eine Selbstabbildung der abgeschlossenen Einheitskugel ist (eigentlich bildet Φ auf die Spähre ab). Φ ist ebenfalls stetig, da für $(x^{(k)})_k \subset l_2(\mathbb{N}_0)$ mit $x^{(k)} \to x$ in $l_2(\mathbb{N}_0)$ gilt

$$\begin{aligned}\|\Phi(x^{(k)}) - \Phi(x)\|^2_{l_2(\mathbb{N}_0)} = &\left(\sqrt{1 - \|x^{(k)}\|_{l_2(\mathbb{N}_0)}} - \sqrt{1 - \|x\|^2_{l_2(\mathbb{N}_0)}}\right)^2 \\ &+ \|x^{(k)} - x\|^2_{l_2(\mathbb{N})} \to 0, \quad k \to \infty.\end{aligned}$$

Φ besitzt jedoch keinen Fixpunkt. Angenommen dies wäre der Fall, d.h. es existiert ein $y = (y_0, y_1, \ldots) \in \overline{B_1(0)}$ mit $\Phi(y) = y$, wobei wegen obiger Rechnung die Identität $\|y\|_{l_2(\mathbb{N}_0)} = 1$ gilt. Die Gleichung $\Phi(y) = y$ bedeutet ausgeschrieben also

$$\begin{aligned} y_0 &= \Phi(y)_0 = \sqrt{1 - \|y\|^2_{l_2(\mathbb{N}_0)}} = 0 \\ y_1 &= \Phi(y)_1 = y_0 = 0 \\ y_2 &= \Phi(y)_2 = y_1 = 0 \\ &\vdots \quad \vdots \end{aligned}$$

d.h. aber $y = 0$ – ein Widerspruch.

In unendlich-dimensionalen Räumen ist die Eigenschaft der Stetigkeit zu wenig bzw. zu schwach. Um die Existenz eines Fixpunktes einer stetigen Selbstabbildung nachweisen zu können, benötigt man z.B. eine Kompaktheitsbedingung.

Theorem 3.3.2 (Fixpunktsatz von Schauder)**.** *Es sei* $(X, \|\cdot\|_X)$ *ein Banachraum,* $M \subset X$ *eine nichtleere konvexe und kompakte Menge. Dann besitzt jede stetige Abbildung* $\Phi : M \to M$ *mindestens einen Fixpunkt.*

Alternativ kann die Kompaktheitsbedingung nicht in die Menge M, sondern in den „Operator“ gesteckt werden.

Korollar 3.3.1 (Fixpunktsatz von Schauder)**.** *Es sei* $(X, \|\cdot\|_X)$ *ein Banachraum,* $M \subset X$ *eine nichtleere konvexe, beschränkte und abgeschlossene Menge. Dann besitzt jede kompakte Abbildung* $\Phi : M \to M$ *mindestens einen Fixpunkt.*

Beweis des Korollars. Aus der Beschränktheit von M und der Kompaktheit von Φ folgt, dass $\Phi(M)$ relativ kompakt in X ist. Dann folgt mit einem Satz aus der Funktionalanalysis (Satz von Mazur), dass die abgeschlossene konvexe Hülle $N := \text{conv}\,\{\Phi(M)\}$ kompakt in X ist. Da M konvex und abgeschlossen und $\Phi(M) \subset M$ gilt, ist $N \subset M$. Aus der Definition von N folgt ebenfalls, dass $\Phi : N \to N$. Die Menge N und die Abbildung $\Phi : N \to N$ erfüllen die Voraussetzungen vom Satz 3.3.2 und damit die Behauptung. □

Der Satz von Schauder beruht auf dem Fixpunktsatz von Brouwer und der Möglichkeit, kompakte Operatoren durch „endlich-dimensionale“ Operatoren zu approximieren. Für den Beweis benötigen wir daher folgendes Lemma

Lemma 3.3.1. *Sei* $(X, \|\cdot\|_X)$ *ein Banachraum,* $M \subset X$ *eine nichtleere beschränkte Teilmenge,* $\Phi : M \to X$ *ein kompakter Operator. Dann gilt:* $\forall n \in \mathbb{N}$ *existert ein kompakter Operator* $\Phi_n : M \to X$ *mit den Eigenschaften*

$$\|\Phi_n(x) - \Phi(x)\|_X \le 1/n, \quad \forall x \in M$$

und

$$\dim(lin(\Phi_n(M))) < \infty.$$

Proof. Da M beschränkt und Φ kompakt ist, ist die Menge $\Phi(M)$ eine relativ kompakte Teilmenge von X, d.h. aus einer beliebigen Überdeckung können wir eine endliche Teilüberdeckung auswählen. Sei $n \in \mathbb{N}$ gegeben und

$$\Phi(M) \subset \bigcup_{y \in \Phi(M)} B_{1/n}(y)$$

eine Überdeckung von $\Phi(M)$. Dann gibt es $y_1 = \Phi(x_1), \dots, y_{m(n)} = \Phi(x_{m(n)}) \in \Phi(M)$ mit

$$\Phi(M) \subset \bigcup_{k=1}^{m(n)} B_{1/n}(y_k) = \bigcup_{k=1}^{m(n)} B_{1/n}(\Phi(x_k)),$$

d.h. es gibt eine endliche Teilüberdeckung (ε-Netz). Definiere Abbildungen $\Phi_n : M \to X$ durch

$$\Phi_n(x) := \frac{\sum_{k=1}^{m(n)} \alpha_k(x)\Phi(x_k)}{\sum_{k=1}^{m(n)} \alpha_k(x)}, \quad x \in M$$

mit

$$\alpha_j(x) := \max\{1/n - \|\Phi(x) - \Phi(x_j)\|_X, 0\}, \quad \forall j = 1, \dots, m(n).$$

Die Operatoren $\Phi_n : M \to X$ sind stetig und trivialerweise ist $\dim(lin(\Phi_n(M))) \leq m(n)$. Da $\Phi(M)$ beschränkt ist, gilt dies auch für $\Phi_n(M)$ und damit (als Teilmenge eines endlich-dimensionalen Vektorraums) relativ kompakt. Die Stetigkeit der Φ_n impliziert die Kompaktheit der Φ_n. Es bleibt die Abschätzung zu zeigen. Es gilt

$$\begin{aligned}
\|\Phi_n(x) - \Phi(x)\|_X &= \frac{\|\sum_{k=1}^{m(n)} \alpha_k(x)[\Phi(x_k) - \Phi(x)]\|_X}{\sum_{k=1}^{m(n)} \alpha_k(x)} \\
&\leq \frac{\sum_{k=1}^{m(n)} \alpha_k(x)\|\Phi(x_k) - \Phi(x)\|_X}{\sum_{k=1}^{m(n)} \alpha_k(x)} \\
&\leq \frac{1}{n},
\end{aligned}$$

da $\alpha(x_j) \neq 0$ genau dann, wenn $\|\Phi(x) - \Phi(x_j)\|_X \leq 1/n$. □

Nun können wir den Satz von Schauder beweisen.

Schauder. Da $\Phi : M \to M$ stetig ist (nach Voraussetzung) und $M \subset X$ kompakt, ist die Abb. Φ kompakt. Nach dem obigen Lemma können wir Φ durch endlich-dimensionale kompakte Operatoren Φ_n (genau jene aus obigen Beweis) approximieren. Für $n \in \mathbb{N}$ setze $M_n := \operatorname{conv}\left\{\Phi(x_1), \dots, \Phi(x_{m(n)})\right\}$. Da M konvex und abgeschlossen ist, gilt dies für $M_n \subset M$ ebenfalls. Da M_n Teilmenge eines endlich-dimensionalen Teilraums von X ($M_n \subset \operatorname{span}\{\Phi(x_1), \dots, \Phi(x_n)\}$) ist und beschränkt und abgeschlossen, ist M_n ebenfalls konvex und kompakt. Nach dem Satz von Brouwer besitzt die stetige Abbildung $\Phi_n : M_n \to M_n$ mindestens einen Fixpunkt $x_n = \Phi_n(x_n)$. Die so gewonnene Folge $(x_n)_n \subset M$ besitzt eine konvergente Teilfolge $x_{n_k} \to x \in M$. Der Punkt x ist der gesuchte Fixpunkt von Φ, da

$$\|x_{n_k} - \Phi(x)\|_X \leq \|x_{n_k} - \Phi(x_{n_k})\|_X + \|\Phi(x_{n_k}) - \Phi(x)\|_X$$

$$
\begin{aligned}
&= \|\Phi_{n_k}(x_{n_k}) - \Phi(x_{n_k})\|_X + \|\Phi(x_{n_k}) - \Phi(x)\|_X \\
&\leq \frac{1}{n_k} + \|\Phi(x_{n_k}) - \Phi(x)\|_X \to 0 \quad k \to \infty,
\end{aligned}
$$

da Φ stetig ist. $\square$

Beispiel 3.3.5. Wir betrachten das RWP (3.11), d.h.

$$
\begin{aligned}
-\nabla\cdot(a(x,u)\nabla u) + \Phi(x,u) &= f, \quad x \in \Omega, \\
u &= 0, \quad x \in \Gamma = \partial\Omega,
\end{aligned}
$$

wobei $f \in Y^* := \mathrm{H}^{-1}(\Omega)$, $a : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{N\times N}$ eine Caratheodory-Funktion mit

- $a_{ij} \in \mathrm{L}_\infty(\Omega \times \mathbb{R})$ für alle $i,j = 1,\dots,N$;
- $\exists\lambda > 0$: $(a(x,u)\cdot\xi|\xi) \geq \lambda|\xi|^2$ für alle $u \in \mathbb{R}$, $\xi \in \mathbb{R}^N$, f.a. $x \in \Omega$.

Zusätzlich sei $\Phi \equiv 0$ ($\Phi \not\equiv 0$ siehe Übung). Die schwache Formulierung lieferte eine Form $b_2 : Y \times Y \to \mathbb{R}$ mit $Y = \mathring{\mathrm{H}}^1(\Omega)$, und damit auch einen nichtlinearen Operator $\mathcal{A}_2 : Y \to Y^*$ definiert durch

$$
\langle \mathcal{A}_2(u), v\rangle_{Y^*,Y} = \int_\Omega (a(x,u)\nabla u|\nabla v)v\,dx,
$$

d.h. das obige Problem nimmt die abstrakte Form $\mathcal{A}_2(u) = f$ an. Wir konnten zeigen, dass $\mathcal{A}_2$ koerzitiv ist, aber i.a. nicht monoton. Das obige RWP soll nun mit dem Satz 3.3.2 gelöst werden. Dazu benötigt man eine Fixpunktformulierung. Dies geht wie folgt: sei $w \in Y$ gegeben, dann definiere die Abbildung $\Psi : Y \to Y$ durch $\Psi(w) := u$, wobei u schwache Lösung des linearen (!) RWPs

$$
\begin{aligned}
-\nabla\cdot(a(x,w(x))\nabla u) &= f, \quad x \in \Omega, \\
u &= 0, \quad x \in \Gamma
\end{aligned}
\tag{3.13}
$$

bezeichnet. In der Tat besitzt dieses RWP eine eindeutige schwache Lösung aufgrund der Voraussetzungen. Dies sieht man wie folgt. Die schwache Formulierung lautet

$$
d(u,v) = \langle f, v\rangle_{Y^*,Y}, \quad \forall v \in Y,
$$

wobei

$$
d(u,v) := \int_\Omega (a(x,w(x))\cdot\nabla u|\nabla v)\,dx.
$$

Die Bilinearform $d : Y \times Y \to \mathbb{R}$ ist beschränkt und koerzitiv für alle $w \in Y$, denn

$$
|d(u,v)| \leq \|a\|_{\mathrm{L}_\infty(\Omega\times\mathbb{R};\mathbb{R}^{N\times N})}\|u\|_Y\|v\|_Y < \infty,
$$

and

$$\begin{aligned} d(u,u) &= \int_\Omega (a(x,w(x)) \cdot \nabla u | \nabla u)\, dx \geq \lambda \int_\Omega |\nabla u|^2\, dx \\ &\geq \frac{\lambda c_p}{2} \|u\|^2_{\mathrm{L}_2(\Omega)} + \frac{\lambda}{2} \|\nabla u\|^2_{\mathrm{L}_2(\Omega)} \\ &\geq \min\{c_p, 1\} \frac{\lambda}{2} \|u\|^2_Y =: C\|u\|^2_Y, \quad \forall u \in Y \end{aligned}$$

mit der Poincare-Konstante $c_p > 0$. Wir können also folgende Abbildung definieren

$$\Psi : \mathrm{L}_2(\Omega) \to \mathrm{L}_2(\Omega), \quad w \mapsto \Psi(w) = u,$$

wobei u die eindeutige Lösung von (3.13) ist. Es gilt: u ist Lösung von (3.11), falls $\Psi(u) = u$ gilt, d.h. Fixpunkt der Abbildung Ψ ist. Wir wollen nun den Fixpunktsatz von Schauder anwenden. Dafür wählen wir $X = \mathrm{L}_2(\Omega)$ und $M \subset Y = \mathring{\mathrm{H}}^1(\Omega)$ eine geeignete nichtleere, beschränkte, konvexe Teilmenge.

1. Teilbehauptung: $\Psi : M \to M$ ist eine Selbstabbildung, wobei $M := \{v \in Y : \|v\|_Y \leq 1/C\|f\|_{Y^*} =: R\} = \overline{B_R(0)} \subset Y$. Aus dem Lemma von Lax-Milgram bekommt man die Abschätzung

$$\forall w \in X : \quad \|u\|_Y = \|\Psi(w)\|_Y \leq \frac{1}{C}\|f\|_{Y^*},$$

d.h. gerade $\Psi(X) \subset M$ und somit beschränkt. Insbesondere gilt auch $\Psi(M) \subset M$, da $M \subset Y \subset X$.

2. Teilbehauptung: $\Psi(M)$ ist relativ kompakt in X. Da ausserdem

$$\Psi(X) \subset Y = \mathring{\mathrm{H}}^1(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow X = \mathrm{L}_2(\Omega)$$

gilt ($1 - n/2 > -n/2$!), ist die Menge $\Psi(M) \subset X$ relativ kompakt.

3. Teilbehauptung: Ψ ist stetig und damit ist Ψ ein kompakter Operator. Die letztere Aussage folgt aus der Stetigkeit und der 2. Teilbehauptung. Es bleibt also die Stetigkeit zu zeigen.

Sei $(u_n)_n \subset X = \mathrm{L}_2(\Omega)$ eine konvergente Folge, also $u_n \to u$ in X. Dann müssen wir zeigen, dass $\Psi(u_n) \to \Psi(u)$ in X gilt. Gezeigt wird allerdings nur, dass jede Teilfolge von $(\Psi(u_n))_n$ eine weitere Teilfolge besitzt, die stark in X gegen $\Psi(u)$ konvergiert. (Ein einfacher Widerspruchsbeweis zeigt, dass dann die gesamte Folge schon gegen $\Psi(u)$ in X konvergiert. Angenommen $\Psi(u_n)$ konvergiert nicht stark in X, dann existiert eine $\delta > 0$ und eine Teilfolge $(\Psi(u_{n_k}))_k$ von $(\Psi(u_n))_n$ mit $n_k \to \infty$ für $k \to \infty$, so dass $\|\Psi(u_{n_k}) - \Psi(u)\|_X \geq \delta$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Aus der obigen Zwischenbehauptung folgt jedoch, dass die Teilfolge $(\Psi(u_{n_k}))_k$ eine Teilfolge enthält, die stark in X konvergiert. Diese Tatsache widerspricht der Ungleichung, die ebenfalls für die Teilfolge von $(\Psi(u_{n_k}))_k$ gilt.)

Sei also $u_n \to u$ in X und $v_n = \Psi(u_n)$. Da $(v_n)_n \subset M$, ist die Folge $(v_n)_n$ beschränkt und die kompakte Einbettung in den $L_2(\Omega)$ liefert: Jede Teilfolge von $(v_n)_n$ besitzt eine weitere Teilfolge, die stark konvergiert,

$$v_{n_k} \to v \quad \text{in } X, \quad \text{insbesondere:} \quad v_{n_k}(x) \to v(x) \quad \text{f. ü. in } \Omega.$$

Da Y reflexiv ist, erhalten wir mit dem Satz 3.2.4: Die Folge v_{n_k} besitzt eine Teilfolge $v_{n'_k}$, so dass

$$v_{n'_k} \rightharpoonup \overline{v} \quad \text{in } Y.$$

Im folgenden bezeichnen wir $v_{n'_k}$ wieder mit v_{n_k}. Wir zeigen, dass $v = \overline{v}$, also insbesondere $v \in Y$. Einerseits gilt $\langle y^*, v_{n_k}\rangle_{Y^*,Y} \to \langle y^*, \overline{v}\rangle_{Y^*,Y}$ für alle $y^* \in Y^*$. Andererseits, da $Y \overset{d}{\hookrightarrow} X$ und somit $X^* \hookrightarrow Y^*$, wissen wir $\langle x^*, y\rangle_{X^*,X} = \langle x^*, y\rangle_{Y^*,Y}$ für alle $y \in Y$, $x^* \in X^*$, was folgende Konvergenz impliziert

$$\begin{aligned}\langle x^*, v - \overline{v}\rangle_{X^*,X} &= \langle x^*, v - v_{n_k}\rangle_{X^*,X} + \langle x^*, v_{n_k} - \overline{v}\rangle_{X^*,X} \\ &= \langle x^*, v - v_{n_k}\rangle_{X^*,X} + \langle x^*, v_{n_k} - \overline{v}\rangle_{Y^*,Y} \to 0, \quad k \to \infty.\end{aligned}$$

Der erste Ausdruck konvergiert gegen 0, da $v_{n_k} \to v$ in X. Die Konvergenz des zweiten Ausdrucks folgt aus der schwachen Konvergenz $v_{n_k} \rightharpoonup \overline{v}$ in Y. Bisher wissen wir also

$$\begin{aligned}&v_{n_k} \to v \quad \text{in } X,\\ &v_{n_k}(x) \to v(x) \quad \text{f. ü. in } \Omega,\\ &v_{n_k} \rightharpoonup v \quad \text{in } Y,\end{aligned}$$

d.h. insbesondere $v \in Y$. Wir zeigen nun, dass

$$D_i v_{n_k} \rightharpoonup D_i v \quad \text{in } X \quad \forall i = 1, \dots, N$$

gilt und damit $\nabla v_{n_k} \rightharpoonup D_i v$ in X. Da die Folge $(D_i v_{n_k})_k$ auch beschränkt in X ist, gibt es eine Teilfolge, diese sei wieder mit $D_i v_{n_k}$ bezeichnet, so dass $D_i v_{n_k} \rightharpoonup v_i$ in X für alle $i = 1, \dots, N$. Es gilt jedoch $D_i v = v_i$ aufgrund

$$\begin{aligned}\int_\Omega v D_i\phi\, dx &= \lim_{k\to\infty} \int_\Omega v_{n_k} D_i\phi\, dx = -\lim_{k\to\infty} \int_\Omega D_i v_{n_k} \phi\, dx\\ &= -\int_\Omega v_i \phi\, dx.\end{aligned}$$

Aus den Eigenschaften der Funktion a, der Konvergenz $u_n(x) \to u(x)$ f. ü in Ω und dem Satz von Lebesgue (dominierte Konvergenz) folgt weiterhin

$$\begin{aligned}&a(x, u_{n_k}(x)) \to a(x, u(x)) \quad \text{f.ü. in } \Omega,\\ &a(\cdot, u_{n_k}(\cdot))^T \cdot \nabla\phi \to a(\cdot, u(\cdot))^T \cdot \nabla\phi \quad \text{in } X.\end{aligned}$$

Betrachte nun $v_{n_k} = \Psi(u_{n_k})$, d.h. das elliptische Problem

$$\int_\Omega (\nabla v_{n_k} | a(x, u_{n_k}(x))^T \cdot \nabla\phi)\, dx = \int_\Omega (a(x, u_{n_k}(x)) \cdot \nabla v_{n_k} | \nabla\phi)\, dx = \langle f, \phi\rangle_{Y^*,Y}$$

für alle $\phi \in Y$. Die bisher gezeigten Konvergenzresultate, d.h. die starke Konvergenz $a(\cdot, u_{n_k}(\cdot))^T \cdot \nabla\phi \to a(\cdot, u(\cdot))^T \cdot \nabla\phi$ in X und die schwache Konvergenz $\nabla v_{n_k} \rightharpoonup \nabla v$ in X, ergeben nun

$$\langle f, \phi\rangle_{Y^*,Y} = \int_\Omega (\nabla v_{n_k} | a(x, u_{n_k}(x))^T \cdot \nabla\phi)\, dx \quad \underset{k\to\infty}{\to} \quad \int_\Omega (\nabla v | a(x, u(x))^T \cdot \nabla\phi)\, dx,$$

d.h. aber $\Psi(u_{n_k}) = v_{n_k} \to v = \Psi(u)$.

4. Zusammenführung aller Teilergebnisse. Wir haben gezeigt, dass $\Psi : M \to M$ eine kompakte Selbstabbildung ist. Die Menge M ist nichtleer, beschränkt, abgeschlossen und konvex. Nach dem Satz von Schauder besitzt die Abbildung Ψ einen Fixpunkt $u^* \in M$, d.h. eine schwache Lösung von (3.11).

Wir betrachten nun wieder die Operatorgleichung

$$A(u) = f$$

mit einem monotonen Operator $A : V \to V^*$. Neben den Eigenschaften der Monotonie und der Koerzitivität benötigen wir natürlich eine Stetigkeitsbedingung an den Operator, damit man Surjektivität bekommt. Da der schwache Konvergenzbegriff zur Verfügung steht, können wir neben den klassischen (starken) Stetigkeitsbegriff auch schwächere Stetigkeitsbegriffe einführen.

Definition 3.3.3. *Sei $(V, \|\cdot\|_V)$ ein Banachraum, $A : V \to V^*$ ein Operator.Dann heisst A*

- *hemi-stetig, falls die Funktion $h_A : [0,1] \to \mathbb{R}$ definiert durch*

  $$h_A(t) := \langle A(u + tv), w\rangle_{V^*,V}$$

  stetig ist für alle $u, v, w \in V$;
- *demi-stetig, wenn aus $u_n \to u$ in V folgt, dass $A(u_n) \rightharpoonup A(u)$ in V^*;*
- *stark-stetig, falls aus $u_n \rightharpoonup u$ in V folgt, dass $A(u_n) \to A(u)$ in V^*.*

Bemerkung 3.3.3. 1. Es gelten die folgenden Implikationen: A stark stetig $\Rightarrow$ A stetig $\Rightarrow$ A demi-stetig $\Rightarrow$ A hemi-stetig.
Beweis der letzten Implikation: sei A demi-stetig, d.h. aus $u_n \to u$ in V folgt

$$\langle v^{**}, A(u_n) - A(u)\rangle_{V^{**},V^*} \to 0 \quad \forall v^{**} \in V^{**}.$$

Zeige nun Stetigkeit von h_A. Sei $(t_n)_n \subset [0,1]$ mit $t_n \to t$ in $[0,1]$. Betrachte

$$|h_A(t_n) - h_A(t)| = |\langle A(u + t_n v) - A(u + tv), w\rangle_{V^*,V}|$$

$$
\begin{aligned}
&= |\langle j_w, A(u+t_n v) - A(u+tv)\rangle_{V^{**},V^*}| \\
&= |\langle j_w, A(\hat{u}_n) - A(\hat{u}\rangle_{V^{**},V^*}| \to 0, \quad \forall j_w \in V^{**},
\end{aligned}
$$

wobei $\hat{u}_n := u + t_n v \to \hat{u} := u + tv$. Da $V \hookrightarrow V^{**}$ gilt, folgt die Behauptung. (bzw. $A(u_n) \rightharpoonup A(u)$ in V^* impliziert $A(u_n) \rightharpoonup^* A(u)$ in V^*.)

2. Im Fall $\dim V < \infty$ sind schwache und starke Konvergenz äquivalent. Folglich fallen die Begriffe der starken Stetigkeit, der Stetigkeit und der Demi-Stetigkeit zusammen. Hemi-Stetigkeit bleibt jedoch auch im endlich-dimensionalen ein schwächerer Stetigkeitsbegriff.

3. Falls der Banachraum V reflexiv ist, dann gilt: A ist stark stetig $\Rightarrow$ A ist kompakt. Da die Implikation „A ist stark stetig $\Rightarrow$ A ist stetig" gilt, müssen wir noch die Konvergenz einer Teilfolge von $(A(u_n))_n$ zeigen, wobei $(u_n)_n$ eine beschränkte Folge ist. Die Reflexivität von V liefert mit Satz 3.2.4, dass es eine Teilfolge von $(u_{n_k})_k$ gibt, die schwach konvergiert, also $u_{n_k} \rightharpoonup u$ in V. Die starke Stetigkeit von A gibt die Konvergenz $A(u_{n_k}) \to A(u)$ in V.

Beispiel 3.3.6. Sei $V = V^* = \mathbb{R}^2$ und $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$
f(x,y) := \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}.
$$

Dann ist f stetig in $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$, aber offensichtlich nicht stetig in $\mathbb{R}^2$. (Betrachte die Folge $(1/n, 1/\sqrt{n})$.) Hemi-stetig ist die Funktion jedoch auch in $(0,0)$, denn für $(x_1,y_1) \neq (0,0)$ gilt

$$
\begin{aligned}
f((0,0) + t(x_1,y_1)) = t^3 \frac{x_1 x_2^2}{t^2 x_1^2 + t^4 y_1^4} \\
= t \frac{x_1 x_2^2}{x_1^2 + t^2 y_1^4} \to 0, \quad t \to 0.
\end{aligned}
$$

Beispiel 3.3.7. Sei $V = \mathrm{L}_2(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ein beschränktes Gebiet und $g \in V$. Der Operator $T_g : V \to V$ definiert durch

$$
T_g(f) := \|f\|^2_{\mathrm{L}_2(\Omega)} \cdot g
$$

ist ein kompakter Operator, aber nicht stark stetig. (Übung) Die Stetigkeit folgt durch einfaches Nachrechnen. Sei $u_n \to u$ in V und betrachte

$$
\begin{aligned}
\|T_g(u_n) - T_g(u)\|_V &= \left(\int_\Omega |\|u_n\|_V^2 g - \|u\|_V^2 g|^2 \, dx \right)^{1/2} \\
&= |\|u_n\|_V^2 - \|u\|_V^2| \|g\|_V \to 0 \quad n \to \infty.
\end{aligned}
$$

Zur Kompaktheit: sei u_n beschränkt in V, dann müssen wir zeigen, dass eine konvergente Teilfolge von $(T_g(u_n))_n$ existiert. Aus der Beschränktheit von u_n und

$$
\|T_g(u_n)\|_V = \|u_n\|_V^2 \|g\|_V,
$$

folgt dass $(T_g(u_n))_n$ ebenfalls beschränkt ist. Da V reflexiv ist, folgt aus der Beschränktheit von $(T_g(u_n))_n$, dass

$$h_n := T_g(u_n) \rightharpoonup h \quad \text{in V},$$

d.h. wir müssen nur noch die starke Konvergenz zeigen. Da V ein Hilbertraum ist, nutzen wir folgende Eigenschaft (siehe Bem. 3.2.2): gilt $h_n \rightharpoonup h$ in V und $\|h_n\|_V \to \|h\|_V$, dann $h_n \to h$ in V.
Die schwache Konvergenz der Folge $(h_n)_n$ bedeutet

$$\int_\Omega \|u_n\|_V^2 gf\, dx \to \int_\Omega hf\, dx \quad \forall f \in X^* = X.$$

Wähle $f = g\|g\|_V^{-1}$, dann folgt

$$\int_\Omega \|u_n\|_V^2 gf\, dx = \int_\Omega \|u_n\|_V^2 |g|^2\, dx \|g\|_V^{-1} = \|u_n\|_V^2 \|g\|_V = \|h_n\|_V$$

und somit

$$\|h_n\|_V \to \int_\Omega hg\, dx \|g\|_V^{-1} \leq \|h\|_V.$$

Andererseits gilt für die schwach konvergente Folgen h_n, dass $\|h\|_V \leq \liminf \|h_n\|_V$ und mit obiger Konvergenz schliesslich

$$\|h\|_V \leq \lim_{n\to\infty} \|h_n\|_V \leq \|h\|_V,$$

also $\|h_n\|_V \to \|h\|_V$.
Das der Operator T_g nicht stark stetig ist, sieht man wie folgt: sei $u_n \rightharpoonup u$ in V, aber nicht stark konvergent (in diesem Fall gilt natürlich $T_g(u_n) \to T_g(u)$ in V). Angenommen $T_g(u_n)$ konvergiert stark gegen $T_g(u)$ in V, dann muss aber $\|u_n\|_V \to \|u\|_V$ gelten (siehe oben). In diesem Fall ist die Folge u_n jedoch schon stark konvergent, ein Widerspruch zur Voraussetzung. Somit ist T_g nicht stark konvergent.

Als erstes werden wir sehen, dass Monotonie bzw. demi-Stetigkeit lokale Beschränktheit impliziert. Letzteres bedeutet folgendes:
Sei $A : V \to V^*$ ein nichtlinearer Operator. Dann heisst A lokal beschränkt, falls für alle $u \in V$ ein $\delta(u) > 0$ existiert, so dass das Bild $A(B_\delta(u))$ der Kugel $B_\delta(u) = \{v \in V : \|u - v\|_V \leq \delta\}$ in V^* beschränkt ist.

Lemma 3.3.2. *Sei $(X, \|\cdot\|_X)$ eine reflexiver Banachraum, $A : X \to X^*$ ein Operator. Dann gilt:*

1. *A ist demi-stetig.* $\Rightarrow$ *A ist lokal beschränkt.*
2. *A ist monoton.* $\Rightarrow$ *A ist lokal beschränkt.*

Proof. 1. (Beweis durch Widerspruch): Sei A nicht lokal beschränkt, d.h. es gibt ein $u \in X$ und eine Folge $(u_n)_n \subset X$ mit $u_n \to u$, so dass $\|A(u_n)\|_{X^*} \to \infty$. Da A demi-stetig ist, folgt $A(u_n) \rightharpoonup A(u)$ in X. Folglich ist $(A(u_n))_n$ beschränkt nach Bem. 3.2.2. Dies ist aber ein Widerspruch zur Annahme. Also ist A lokal beschränkt.
2. (Beweis durch Widerspruch): Sei A nicht lokal beschränkt, dann gibt es ein $u \in X$ und eine Folge $(u_n)_n \subset X$ mit $u_n \to u$, so dass $\|A(u_n)\|_{X^*} \to \infty$. O.B.d.A. sei $u = 0$. Wir setzen

$$a_n = (1 + \|A(u_n)\|_{X^*}\|u_n\|_X)^{-1}.$$

Die Monotonie von A liefert, dass für alle $v \in X$ gilt

$$\langle A(u_n) - A(\pm v), u_n - (\pm v)\rangle_{X^*,X} \geq 0.$$

Mit obiger Bezeichnung ist dies äquivalent zu

$$\begin{aligned}
\pm a_n\langle A(u_n), v\rangle_{X^*,X} &\leq a_n \left(\langle A(u_n), u_n\rangle_{X^*,X} - \langle A(\pm v), u_n \mp v\rangle_{X^*,X}\right) \\
&\leq a_n \left(\|A(u_n)\|_{X^*}\|u_n\|_X + \|A(\pm v)\|_{X^*}\|u_n \mp v\|_X\right) \\
&\leq a_n \left(\|A(u_n)\|_{X^*}\|u_n\|_X + \|A(\pm v)\|_{X^*}\|u_n\|_X + \|A(\pm v)\|_{X^*}\|v\|_X\right) \\
&= a_n \left(a_n^{-1} - 1 + \|A(\pm v)\|_{X^*}\|u_n\|_X + \|A(\pm v)\|_{X^*}\|v\|_X\right) \\
&\leq 1 + c(v),
\end{aligned}$$

nach Definition von a_n und $\|u_n\|_X < 1$ für $n \geq n_0$ ($u_n \to 0$) und da $\|A(\pm v)\|_{X^*}$, $\|v\|_X$ Konstanten sind. Somit gilt für alle $v \in X$

$$\sup_n \langle a_n A(u_n), v\rangle_{X^*,X} < \infty,$$

d.h. die linearen stetigen Abbildungen $B_n := a_n A(u_n) : X \to \mathbb{R}$ sind punktweise beschränkt. Das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit liefert also

$$\sup_n \|a_n A(u_n)\|_{X^*} \leq c^* < \infty.$$

Setzen wir $b_n := \|A(u_n)\|_{X^*}$, so gilt $b_n \to \infty$ nach Annahme, sowie

$$c^*\|u_n\|_X < 1 \quad \forall n \geq n_1(c^*) \geq n_0$$

für ein $n_1 \in \mathbb{N}$. Weiterhin gilt die Relation

$$\forall n \geq n_1 : \quad 0 \leq b_n \leq c^*/a_n = c^*(1 + b_n\|u_n\|_X) \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq b_n \leq \frac{c^*}{1 - c^*\|u_n\|_X}.$$

Grenzübergang liefert jedoch

$$\lim_{n\to\infty} b_n \leq c^*,$$

ein Widerspruch zur Annahme. □

Es gelten folgende wichtige Zusammenhänge für monotone Operatoren, auch Minty's Trick genannt.

Lemma 3.3.3. *Sei $(X, \|\cdot\|_X)$ eine reflexiver Banachraum, $A : X \to X^*$ ein monotoner Operator. Dann gilt:*

1. *A sei zusätzlich hemi-stetig. Dann*
   (a) *Falls A maximal monoton ist, d.h. seien $u \in X$, $b \in X^*$ gegeben, so dass*
   $$\langle b - A(v), u - v\rangle_{X^*,X} \geq 0, \quad \forall v \in X,$$
   dann folgt schon $A(u) = b$.
   (b) *A genügt der Bedingung (M), d.h. aus*
   $$\begin{aligned} u_n &\rightharpoonup u && \text{in } X, \\ A(u_n) &\rightharpoonup b && \text{in } X^*, \\ \langle A(u_n), u_n\rangle_{X^*,X} &\to \langle b, u\rangle_{X^*,X}, \end{aligned}$$
   folgt $A(u) = b$.
   (c) *Aus*
   $$u_n \rightharpoonup u \quad \text{in } X, \quad A(u_n) \to b \quad \text{in } X^*,$$
   oder alternativ
   $$u_n \to u \quad \text{in } X, \quad A(u_n) \rightharpoonup b \quad \text{in } X^*,$$
   folgt $A(u) = b$.
2. (a) *A ist demi-stetig. $\Leftrightarrow$ A ist hemi-stetig.*
   (b) *A ist stark stetig. $\Leftrightarrow$ A ist kompakt.*

Proof. 1.(a): Seien w,$u \in X$ gegeben. Wir setzen $v = u - tw$, $t \in [0, 1]$. Aufgrund der maximalen Monotonie von A haben wir folgende Implikation:

$$\langle b - A(v), u - v\rangle_{X^*,X} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \langle b - A(u - tw), w\rangle_{X^*,X} \geq 0.$$

Da A hemi-stetig ist, folgt im Grenzübergang $t \to 0$

$$\langle b - A(u), w\rangle_{X^*,X} \geq 0, \quad \forall w \in X.$$

Wir ersetzen w durch $-w$ und erhalten die umgekehrte Ungleichung. Insgesamt gilt also $\langle b - A(u), w\rangle_{X^*,X} = 0$ für alle $w \in X$, d.h. $b = A(u)$.
1.(b): Da A monoton ist, folgt für alle $v \in X$, $n \in \mathbb{N}$

$$0 \leq \langle A(u_n) - A(v), u_n - v\rangle_{X^*,X} = \langle A(u_n), u_n\rangle_{X^*,X} - \langle A(v), u_n\rangle_{X^*,X}$$

$$- \langle A(u_n) - A(v), v\rangle_{X^*,X}.$$

Durch Grenzübergang $n \to \infty$ ergibt sich nach Voraussetzung

$$\langle b - A(v), u - v\rangle_{X^*,X} \geq 0, \quad \forall v \in X,$$

d.h. A ist maximal monoton. 1.(a) impliziert nun $A(u) = b$.
1.(c): Dies folgt direkt aus 1.(b), da nach Voraussetzung und Bemerkung 3.2.2

$$\langle A(u_n), u_n\rangle_{X^*,X} \to \langle b, u\rangle_{X^*,X}$$

gilt.
2.(a): Zu zeigen ist nur die Implikation „$\Leftarrow$", da die Eigenschaft der Demi-Stetigkeit stärker ist als die der Hemi-Stetigkeit.
Sei $(u_n)_n$ eine Folge in X mit $u_n \to u$ in X. Zu zeigen ist $A(u_n) \rightharpoonup A(u)$. Da A monoton ist, ist $(A(u_n))_n$ nach Lemma 3.3.2 lokal beschränkt. Aufgrund der Reflexivität von X gibt es eine Teilfolge $(u_{n_k})_k$, so dass $A(u_{n_k}) \rightharpoonup b$ in X^*. Nach 1.(c) erhalten wir somit $A(u) = b$, d.h. $A(u_{n_k}) \rightharpoonup A(u)$. Aber alle schwach konvergenten Teilfolgen von $(A(u_n))_n$ konvergieren schwach gegen $A(u)$, denn sonst gäbe es eine Teilfolge $A(u_{n_j}) \rightharpoonup b' \neq b = A(u)$. 1.(c) impliziert wiederum $A(u) = b'$, was ein Widerspruch ist. Somit liefert Lemma 3.2.1 (Teilfolgenprinzip), dass die gesamte Folge $(A(u_n))_n$ schwach gegen $b = A(u)$ konvergiert, d.h. A ist demi-stetig.
2.(b): Die Implikation $\Rightarrow$ wurde schon in der Bemerkung 3.3.3 gezeigt. Sei nun der monotone Operator $A : X \to X^*$ kompakt und $u_n \rightharpoonup u$ in X. Wir müssen zeigen, dass $A(u_n) \to A(u)$ in X^* gilt. Die Folge $(u_n)_n$ ist aber beschränkt, so dass die Kompaktheit von A die Existenz einer Teilfolge $(A(u_{n_k}))_k$ liefert mit $A(u_{n_k}) \to b$ in X^*. Da A ebenfalls stetig ist, ist der Operator A ebenfalls hemi-stetig. Mit 1.(c) erhalten wir $A(u_{n_k}) \rightharpoonup b = A(u)$, also

$$A(u_{n_k}) \to A(u) \quad \text{in } X^*.$$

Zu zeigen bleibt, dass die ganze Folge $(A(u_n))_n$ gegen $A(u)$ konvergiert. Angenommen dies ist nicht der Fall, d.h. es gibt eine Teilfolge $(A(u_{n_j}))_j$ die nicht gegen $A(u)$ konvergiert, also

$$\exists \varepsilon > 0 : \quad \|A(u_{n_j}) - A(u)\|_{X^*} \geq \varepsilon, \quad \forall j.$$

Da die Folge (u_{n_j}) wieder schwach gegen u konvergiert und somit beschränkt ist, folgt mit der Kompaktheit von A: es existiert eine Teilfolge $(A_{n'_j})_j$ von $(A_{n_j})_j$ die stark gegen ein $\hat{b} \in X^*$ konvergiert, wobei wieder $\hat{b} = A(u)$ gelten muss. Dies steht im Widerspruch zur obigen Ungleichung. $\square$

Das zentrale Resultat für Operatorgleichungen mit nichtlinearem monotonen Operator ist der Satz von Minty-Browder.

Theorem 3.3.3 (Minty-Browder). *Sei X ein reflexiver separabler Banachraum mit der Basis $\{w_j\}_{j=1}^{\infty} \subset X$ und $\mathcal{A} : X \to X^*$ ein Operator mit folgenden Eigenschaften*

(i) $\mathcal{A}$ ist hemi-stetig,

(ii) $\mathcal{A}$ ist monoton,

(iii) $\mathcal{A}$ ist koerzitiv.

Dann existiert für alle $f \in X^*$ eine Lösung $u \in X$ von

$$\mathcal{A}(u) = f \quad \text{in } X^*,$$

d.h. ist $\mathcal{A}$ surjektiv. Die Lösungsmenge ist abgeschlossen, beschränkt und konvex. Falls $\mathcal{A}$ strikt monoton ist, ist die Lösung eindeutig.

Bevor wir den Satz beweisen werden, betrachten wir eine Anwendung auf das Problem (3.12) in Beispiel 3.3.3.

Beispiel 3.3.8. Wir haben schon gesehen, dass das Problem (3.12) die schwache Formulierung

$$\langle \mathcal{A}_3(u), v\rangle_{V^*,V} = \int_\Omega (|\nabla u|^{p-2}\nabla u|\nabla v)\,dx = \langle f, v\rangle_{V^*,V}, \quad \forall v \in V$$

mit $V = \mathring{\mathrm{H}}^1_p(\Omega)$ besitzt, d.h. wir wollen die Gleichung $\mathcal{A}_3(u) = f$ in V^* lösen.

- Beschränktheit/Wohldefiniertheit: Aufgrund der Abschätzung

  $$|\langle \mathcal{A}_3(u), v\rangle_{V^*,V}| \le \|\nabla u\|^{1-p}_{\mathrm{L}_p(\Omega;\mathbb{R}^N)} \|\nabla v\|_{\mathrm{L}_p(\Omega;\mathbb{R}^N)}$$

  ist $\mathcal{A}_3$ wohldefiniert sowie beschränkt, denn

  $$\begin{aligned}\|\mathcal{A}_3(u)\|_{V^*} &\le \sup_{\|v\|_V\le 1} \|\nabla u\|^{1-1/p}_{\mathrm{L}_p(\Omega;\mathbb{R}^N)} \|\nabla v\|_{\mathrm{L}_p(\Omega;\mathbb{R}^N)}\\ &= \|\nabla u\|^{1-p}_{\mathrm{L}_p(\Omega;\mathbb{R}^N)} \sup_{\|v\|_V\le 1} \|\nabla v\|_{\mathrm{L}_p(\Omega;\mathbb{R}^N)}\\ &\le \|\nabla u\|^{1-p}_{\mathrm{L}_p(\Omega;\mathbb{R}^N)} \sup_{\|v\|_V\le 1} \|v\|_V \le \|\nabla u\|^{1-p}_{\mathrm{L}_p(\Omega;\mathbb{R}^N)}.\end{aligned}$$

  Somit bildet $\mathcal{A}_3$ beschränkte Mengen aus V in beschränkte Mengen in V^* ab.

- $\mathcal{A}_3$ ist hemi-stetig: Seien u, v, $w \in V$ und $(t_n)_n \subset [0,1]$ eine Folge mit $t_n \to t_\infty \in [0,1]$. Die f. ü. Konvergenz in Ω

  $$|\nabla(u+t_nv)(x)|^{p-2}\nabla(u+t_nv)(x) \to |\nabla(u+t_\infty v)(x)|^{p-2}\nabla(u+t_\infty v)(x)$$

  folgt aus Satz von Lebesgue (dominierte Konvergenz). Weiterhin gilt

  $$|\nabla(u+t_nv)|^{p-1} \le (|\nabla u| + |\nabla v|)^{p-1}$$

(da $t_n \in [0,1]$ und z^{p-1} monoton wachsend für $p > 1$)

$$\leq 2^{p-1}\left(|\nabla u|^{p-1} + |\nabla v|^{p-1}\right).$$

Letztere Ungleichung folgt aus

$$\forall a, b \geq 0, \forall s \geq 0: \quad (a+b)^s \leq 2^s(a^s + b^s).$$

Für $a = 0$ bzw. $b = 0$ und $a = b$ ist die Ungleichung trivial. Daher sei o.B.d.A. $a/b < 1$. Weiterhin mit der Monotonie von $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $g(x) = x^s$, $s \geq 0$, bekommt man

$$(a+b)^s = (a/b+1)^s b^s < 2^s b^s \leq 2^s(a^s + b^s).$$

Da $u, v \in V$ und somit $|\nabla u|^{p-1}, |\nabla v|^{p-1} \in \mathrm{L}_{p'}(\Omega)$, $1/p + 1/p' = 1$, liefert Lebesgue's dominierter Konvergenzsatz

$$|\nabla(u + t_n v)|^{p-2}\nabla(u + t_n v) \to |\nabla(u + t_\infty v|^{p-2}\nabla(u + t_\infty v) \quad \text{in } \mathrm{L}_{p'}(\Omega).$$

Daraus folgt die Konvergenz

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{A}_3(u + t_n v), w\rangle_{V^*,V} &= \int_\Omega (|\nabla(u + t_n v)|^{p-2}\nabla(u + t_n v)|\nabla w)\, dx \\
&= \langle |\nabla(u + t_n v)|^{p-2}\nabla(u + t_n v), \nabla w\rangle_{\mathrm{L}_{p'}(\Omega;\mathbb{R}^N),\mathrm{L}_p(\Omega;\mathbb{R}^N)} \\
&\to \int_\Omega (|\nabla(u + t_\infty v)|^{p-2}\nabla(u + t_\infty v)|\nabla w)\, dx \\
&= \langle \mathcal{A}_3(u + t_\infty v), w\rangle_{V^*,V}.
\end{aligned}$$

- Die strikte Monotonie als auch die Koerzitivität von $\mathcal{A}_3$ hatten wir schon gezeigt.

Anwendung des Satzes von Minty-Browder liefert: das Randwertproblem 3.12 besitzt für alle rechten Seiten $f \in \mathrm{H}_p^{-1}(\Omega)$ genau eine schwache Lösung $u \in \overset{\circ}{\mathrm{H}}{}_p^1(\Omega)$.

Beweis des Satzes 3.3.3. 1. Schritt: Eindeutigkeit. Seien $u_1, u_2 \in X$ zwei verschiedene Lösungen der Gleichung $\mathcal{A}(u) = f$. Falls $\mathcal{A}$ strikt monoton ist, gilt nun

$$0 = \langle \mathcal{A}(u_1) - \mathcal{A}(u_2), u_1 - u_2\rangle_{X^*,X} > 0,$$

was ein Widerspruch zur Annahme bedeutet.
2. Schritt: Existenz von approximierenden Lösungen. Mit Hilfe des Galerkin-Verfahrens konstruieren wir approx. Lösungen. Zum besseren Verständnis gibt es hier die Definition dieses Verfahrens.

Definition 3.3.4. *Sei X ein Banachraum.*

1. *Eine Folge von endlich-dimensionalen Teilräumen $X_n \subset X$ heisst Galerkin-Verfahren, falls*

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{dist}(x, X_n) = 0, \quad \forall x \in X.$$

2. *Eine Folge $(v_n)_n \subset X$ von Elementen in X heisst (Galerkin-)Basis, wenn gilt:*
   - $\forall n \in \mathbb{N}$*: $x_1, \dots, x_n$ sind linear unabhängig,*
   - $X = \overline{\bigcup_n X_n}$ *mit* $X_n := \operatorname{span}\{x_1, \dots, x_n\}$.

Für separable Banachräume X gilt nun: (i) X besitzt eine Basis $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ und (ii) für jede Basis von X bilden die Teilräume X_n ein Galerkin-Verfahren. (Konstruktion der Basis aus der dichten abzählbaren Menge von X ist intuitiv. Diese Basis ist wieder dicht in X und es gilt $X_n \subset X_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit folgt $\lim_{n\to\infty} \operatorname{dist}(x, X_n) = 0$ für alle $x \in X$.)

Wir setzen nun $X_n := \operatorname{span}\{w_1, \dots, w_n\}$ und suchen Lösungen

$$u_n = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j w_j \in X_n$$

der Gleichung

$$\langle \mathcal{A}(u_n), v\rangle_{X^*,X} = \langle f, v\rangle_{X^*,X}, \quad \forall v \in X_n. \tag{3.14}$$

Dieses Problem ist equivalent zum folgenden nichtlinearen Gleichungssystem

$$\Phi_k(\alpha) := \langle \mathcal{A}(u_n) - f, w_k\rangle_{X^*,X} = 0, \quad k = 1, \dots, n, \tag{3.15}$$

wobei $\alpha := (\alpha_j)_{j=1}^{n} \in \mathbb{R}^n$ und $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig ist. Dies folgt aus der Tatsache, dass $\mathcal{A}$ nach Lemma 3.3.3 demi-stetig ist: Sei $\{\alpha^{(m)}\}_{m=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n$ mit $\alpha^{(m)} \underset{m\to\infty}{\to} \alpha$, dann erhalten wir

$$u_n^{(m)} := \sum_j \alpha_j^{(m)} w_j \to u_n := \sum_j \alpha_j w_j \quad \text{in } X,$$

weil

$$\|u_n^{(m)} - u_n\|_X \le \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k^{(m)} - \alpha_k| \|w_k\|_X \le c_n |\alpha^{(m)} - \alpha|, \quad c_n := n \max_{k=1,\dots,n} \|w_k\|_X.$$

Demi-Stetigkeit von $\mathcal{A}$ gibt

$$\mathcal{A}(u_n^{(m)}) = \mathcal{A}(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j^{(m)} w_j) \rightharpoonup \mathcal{A}(u_n) = \mathcal{A}(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j w_j) \quad \text{in } X^*$$

und schliesslich die Konvergenz

$$
\begin{aligned}
|\Phi(\alpha^{(m)} - \Phi(\alpha)|^2 &= \sum_{k=1}^{n} |\Phi_k(\alpha^{(m)}) - \Phi_k(\alpha)|^2 \\
&= \sum_{k=1}^{n} |\langle \mathcal{A}(u_n^{(m)}) - \mathcal{A}(u_n), w_k\rangle_{X^*,X}|^2 \to 0.
\end{aligned}
$$

Die Existenz einer Nullstelle von Φ (einer Lösung von (3.14) folgern wir aus folgendem Lemma.

Lemma 3.3.4. *Sei $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion mit der Eigenschaft*

$$
\exists R > 0 : \quad (\phi(x)|x) \geq 0 \quad \forall x \in \partial B_R(0).
$$

Dann besitzt ϕ mindestens eine Nullstelle $x_0 \in \overline{B_R(0)}$.

Proof. (Widerspruchsbeweis) Angenommen $\phi(x) \neq 0$ für alle $x \in \overline{B_R(0)}$. Dann ist die Abbildung $\psi : \overline{B_R(0)} \to \overline{B_R(0)}$ definiert durch

$$
\psi(x) := -\frac{R}{|\phi(x)|}\phi(x)
$$

wohldefiniert und stetig. Nach dem Fixpunktsatz von Brouwer besitzt ψ mindestens einen Fixpunkt $x_0 \in \overline{B_R(0)}$, insbesondere gilt $|x_0| = |\psi(x_0)| = R$. Anwendung der obigen Ungleichung liefert

$$
0 < R^2 = |x_0|^2 = (x_0|x_0) = (\psi(x_0)|x_0) = -\frac{R}{|\phi(x_0)|}(\phi(x_0)|x_0) \leq 0,
$$

was einen Widerspruch zur Annahme bedeutet. □

Wir betrachten daher

$$
\begin{aligned}
(\Phi(\alpha)|\alpha) &= \sum_j \langle \mathcal{A}(u_n) - f, \alpha_j w_j\rangle_{X^*,X} = \langle \mathcal{A}(u_n) - f, u_n\rangle_{X^*,X} \\
&= \langle \mathcal{A}(u_n), u_n\rangle_{X^*,X} - \langle f, u_n\rangle_{X^*,X} \geq \langle \mathcal{A}(u_n), u_n\rangle_{X^*,X} - \|f\|_{X^*}\|u_n\|_X \\
&= \left(\frac{\langle \mathcal{A}(u_n), u_n\rangle_{X^*,X}}{\|u_n\|_X} - \|f\|_{X^*}\right)\|u_n\|_X.
\end{aligned}
$$

Da $\mathcal{A}$ koerzitiv ist, gibt es zu jedem $K > 0$ ein $N(K) > 0$, so dass

$$
\frac{\langle \mathcal{A}(u_n), u_n\rangle_{X^*,X}}{\|u_n\|_X} \geq K \quad \forall \|u_n\|_X \geq N(K).
$$

Wähle nun $K \geq \|f\|_{X^*}$ und damit $(\Phi(\alpha)|\alpha) \geq 0$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}^n$ mit

$$N(K) \leq \|u_n\|_X \leq \sum_j |\alpha_j| \|w_j\|_X \leq c_n |\alpha|.$$

Damit besitzt Φ eine Nullstelle und wir haben eine Folge von approximierenden Lösungen u_n konstruiert.
3. Schritt: Beschränkheit der Folgen $(u_n)_n$ und $(\mathcal{A}(u_n))_n$. Dazu wählen wir $v = u_n$ in (3.14) und erhalten die Abschätzung

$$\langle \mathcal{A}(u_n), u_n \rangle_{X^*,X} \leq \|f\|_{X^*} \|u_n\|_X \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\langle \mathcal{A}(u_n), u_n \rangle_{X^*,X}}{\|u_n\|_X} \leq \|f\|_{X^*},$$

falls $u_n \neq 0$. Angenommen die Folge $(u_n)_n$ sei unbeschränkt, dann liefert die Koerzitivität von $\mathcal{A}$ ein Widerspruch, also existiert ein $R > 0$ mit $\|u_n\|_X \leq R$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die lokale Beschränktheit von $\mathcal{A}$, d.h.

$$\forall u \in X : \exists \delta(u) > 0 : \|u - v\|_X \leq \delta \quad \Rightarrow \quad \{\mathcal{A}(v) : v \in \overline{B_\delta(u)}\} \text{ beschränkt in } X^*,$$

(z.B. in einer Kugel $B_r(0) \subset X^*$, $r = r(\delta(u)) > 0$, liegt) wird uns die Beschränktheit von $(\mathcal{A}(u_n))_n$ liefern. Man schätzt einfach die Norm von $\mathcal{A}(u_n)$ ab, wobei wir benutzen werden, dass

$$\begin{aligned} &\langle \mathcal{A}(u_n) - \mathcal{A}(v), u_n - v \rangle_{X^*,X} \geq 0, \qquad (\text{Monotonie von } \mathcal{A}) , \\ &\|u_n\|_X \leq R \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad \langle \mathcal{A}(u_n), u_n \rangle_{X^*,X} \leq R \|f\|_{X^*}. \end{aligned}$$

Es gilt nun für $\delta = \delta(0)$ und $r = r(\delta(0))$, dass

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A}(u_n)\|_{X^*} &= \sup_{\|v\|_X = 1} \langle \mathcal{A}(u_n), v \rangle_{X^*,X} \leq \frac{1}{\delta} \sup_{\|w\|_X = \delta} \langle \mathcal{A}(u_n), w \rangle_{X^*,X} \\ &\leq \frac{1}{\delta} \sup_{\|w\|_X = \delta} \left(\langle \mathcal{A}(u_n), w \rangle_{X^*,X} + \langle \mathcal{A}(u_n) - \mathcal{A}(w), u_n - w \rangle_{X^*,X} \right) \\ &= \frac{1}{\delta} \sup_{\|w\|_X = \delta} \left(\langle \mathcal{A}(u_n), u_n \rangle_{X^*,X} + \langle \mathcal{A}(w), w \rangle_{X^*,X} - \langle \mathcal{A}(w), u_n \rangle_{X^*,X} \right) \\ &\leq (\|f\|_{X^*} + r) R/\delta + r, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

4. Schritt: Konvergenz des Galerkin-Verfahrens, d.h. Konvergenz der Folge $(u_n)_n$. Die Beschränkheit der Folge $(u_n)_n$ liefert

$$\exists u \in X : \quad u_{n_k} \rightharpoonup u \text{ in } X \ ,$$

und da $(\mathcal{A}(u_{n_k}))_k$ ebenfalls beschränkt ist, gilt

$$\exists g \in X^* : \mathcal{A}(u_{n'_k}) \rightharpoonup g \text{ in } X^*.$$

Sei o.B.d.A. $n'_k = n_k$. Da u_{n_k} Lösung von (3.14) ist, erhalten wir

$$\langle f, v\rangle_{X^*,X} = \langle \mathcal{A}(u_{n_k}), v\rangle_{X^*,X} \to \langle g, v\rangle_{X^*,X} \quad \forall v \in X_n,\ n \in \mathbb{N}.$$

Da $X = \overline{\bigcup_n X_n}$ gilt, ist die obige Gleichung auch für alle $v \in X$ gültig (denn für alle $v \in V$ gibt es ein $n_0(v)$ mit $v \in X_{n_0}$) und damit $f = g$. Es gilt nun insbesondere

$$\langle \mathcal{A}(u_{n_k}), u_{n_k}\rangle_{X^*,X} = \langle f, u_{n_k}\rangle_{X^*,X} \to \langle f, u\rangle_{X^*,X}.$$

Die Voraussetzungen von Lemma 3.3.3 (1.b) sind erfüllt und daher erhalten wir

$$\mathcal{A}(u) = f \quad \text{in } X^*.$$

5. Schritt: Eigenschaften der Lösungsmenge. Dazu setzen wir $S_f := \{u \in X : \mathcal{A}(u) = f\}$ für gegebenes $f \in X^*$. Dann hat die Menge S_f folgende Eigenschaften:

- $S_f \neq \varnothing$ (siehe oben)
- S_f ist beschränkt. Dies folgt im wesentlichen aus der Koerzivität von $\mathcal{A}$. Angenommen S_f ist unbeschränkt, d.h. $\forall R > 0$ existiert ein $u_R \in S_f$ mit $\|u_R\|_X \geq R$. Andererseits gibt es zu jedem $K > 0$ ein $N(K) > 0$ (wähle nun einfach $R := N(K)$) mit

  $$\|f\|_{X^*} \geq \frac{\langle \mathcal{A}(u), u\rangle_{X^*,X}}{\|u\|_X} \geq K, \quad \forall\, \|u\|_X \geq N(K) = R.$$

  Dies ist ein Widerspruch für $K > \|f\|_{X^*}$.
- S_f ist konvex. Seien u_1, $u_2 \in S_f$, d.h. $\mathcal{A}(u_i) = f$ für $i = 1, 2$. Sei $t \in [0, 1]$ und $v = tu_1 + (1-t)u_2 \in X$ und $w \in X$. Dann gilt

  $$\begin{aligned}\langle f - \mathcal{A}(w), v - w\rangle_{X^*,X} &= \langle f - \mathcal{A}(w), tu_1 + (1-t)u_2 - tw - (1-t)w\rangle_{X^*,X} \\ &= \langle f - \mathcal{A}(w), t(u_1 - w)\rangle_{X^*,X} \\ &\quad + \langle f - \mathcal{A}(w), (1-t)(u_2 - w)\rangle_{X^*,X} \\ &= t\langle \mathcal{A}(u_1) - \mathcal{A}(w), u_1 - w\rangle_{X^*,X} \\ &\quad + (1-t)\langle \mathcal{A}(u_2) - \mathcal{A}(w), u_2 - w\rangle_{X^*,X} \\ &\geq 0, \quad \forall w \in X,\end{aligned}$$

  wegen der Monotonie von $\mathcal{A}$. Mit Lemma 3.3.3 (1.a) folgt schon $f = \mathcal{A}(v)$.
- S_f ist abgeschlossen. Sei $(u_n)_n \in S_f$ mit $u_n \to u$ in X. Da $u_n \in S_f$, muss $\mathcal{A}(u_n) = f$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gelten. Damit haben wir

  $$\begin{aligned}\langle f - \mathcal{A}(w), u - w\rangle_{X^*,X} &= \lim_{n\to\infty} \langle f - \mathcal{A}(w), u_n - w\rangle_{X^*,X} \\ &= \lim_{n\to\infty} \langle \mathcal{A}(u_n) - \mathcal{A}(w), u_n - w\rangle_{X^*,X} \\ &\geq 0, \quad \forall w \in X\end{aligned}$$

  und Lemma 3.3.3 (1.a) liefert wieder $f = \mathcal{A}(u)$, d.h. $u \in S_f$.

$\square$

Korollar 3.3.2. *Sei X ein separabler, reflexiver, reeller Banachraum und sei $A : X \to X^*$ ein strikt monotoner, koerziver und hemi-stetiger Operator. Dann existiert der Operator $A^{-1} : X^* \to X$ und ist strikt monoton und demi-stetig.*

Das nächste Ziel soll eine Verallgemeinerung des Satzes von Minty-Browder sein, um Probleme behandeln zu können, die durch Störung eines „gutartigen" Randwertproblems (im Sinne der Anwendbarkeit des Satzes von Minty-Browder) entstehen. Z.B. konnten wir das RWP (3.12) (der p-Laplace-Operator) mit Satz 3.3.3 behandeln und fragen nun nach der Lösbarkeit des RWPs, welches durch eine Störung 0-ter oder 1-ter des p-Laplace Operators entsteht, d.h. man addiere den Term $f(x, u)$ oder einen Konvektionsterm vom Typ $\nabla\cdot f(x, u)$ hinzu.

Die erste Verallgemeinerung des Satzes von Minty-Browder stammt von Lions.

Theorem 3.3.4 (Lions)**.** *Sei X ein reflexiver separabler Banachraum, $\mathcal{A} : X \to X^*$ ein Operator mit folgenden Eigenschaften*

- *$\mathcal{A}$ sei beschränkt;*
- *$\mathcal{A}$ genüge der (M)-Bedingung;*
- *$\mathcal{A}$ ist koerzitiv.*

Dann existiert für alle $f \in X^*$ eine Lösung $u \in X$ von

$$\mathcal{A}(u) = f \quad \textit{in } X^*,$$

d.h. ist $\mathcal{A}$ surjektiv.

Proof. Zuerst zeigen wir, dass die erste und zweite Eigenschaft die Demi-Stetigkeit von $\mathcal{A}$ impliziert. Sei dazu $u_n \to u$ in X. Da $\mathcal{A}$ beschränkt ist, ist die Folge $(\mathcal{A}(u_n))_n$ ebenfalls beschränkt. Der Raum X ist reflexiv (damit auch X^*) und somit gibt es eine Teilfolge $(\mathcal{A}(u_{n_k}))_k$ von $(\mathcal{A}(u_n))_n$, so dass $\mathcal{A}(u_{n_k}) \rightharpoonup f$ in X^*. Die starke Konvergenz der Folge $(u_{n_k})_k$ und die M-Eigenschaft zeigt, dass $f = \mathcal{A}(u)$. Die schwache Konvergenz $\mathcal{A}(u_{n_k}) \rightharpoonup f$ gilt nicht nur für die Teilfolge $(u_{n_k})_k$, sondern für alle Teilfolgen (einfacher Widerspruchsbeweis) und das Teilfolgenprinzip liefert die schwache Konvergenz $\mathcal{A}(u_n) \rightharpoonup f$, d.h. für die ganze Folge.

Nun zum eigentlichen Beweis. Der 2. Schritt aus dem Beweis des Satzen 3.3.3 kann übernommen werden, da nur die Koerzitivität und die Hemi-Stetigkeit benutzt wurden. Im nächsten Schritt wurde die Beschränktheit gezeigt. Die Beschränktheit der $(u_n)_n$ folgt ganz genauso, da nur die Koerzitivität von $\mathcal{A}$ einging. Die Beschränktheit der Folge $(\mathcal{A}(u_n))_n$ ist Teil der Voraussetzung geworden. Im letzten Schritt ging es um die Konvergenz. Dort konnten wir mit Hilfe der Monotonie und Hemi-Stetigkeit von $\mathcal{A}$ das Lemma 3.3.3 anwenden, um die M-Bedingung zu schlussfolgern, die dann $\mathcal{A}(u_{n_k}) \rightharpoonup \mathcal{A}(u)$ zeigt. Diese wird nun jetzt einfach vorausgesetzt. $\square$

Bemerkung 3.3.4.

Die Eindeutigkeit kann unter den obigen Voraussetzungen i.a. nicht gezeigt werden.

Es gilt folgender Summensatz: Ist $\mathcal{A} : X \to X^*$, wobei X reflexiv und separabel ist, beschränkt, monoton und hemi-stetig und $\mathcal{B} : X \to X^*$ stark stetig, dann erfüllt der Operator $\mathcal{A} + \mathcal{B} : X \to X^*$ die (M)-Bedingung.

Proof. Sei $u_n \rightharpoonup u$, $\mathcal{A}(u_n) + \mathcal{B}(u_n) \rightharpoonup f$, und $\langle \mathcal{A}(u_n) + \mathcal{B}(u_n), u_n \rangle_{X^*,X} \to \langle f, u \rangle_{X^*,X}$. Die starke Stetigkeit von $\mathcal{B}$ gibt $\mathcal{B}(u_n) \to \mathcal{B}(u)$. Daraus folgt sofort

$$\mathcal{A}(u_n) \rightharpoonup f - \mathcal{B}(u) =: g,$$

sowie

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{A}(u_n), u_n \rangle_{X^*,X} &= \langle \mathcal{A}(u_n) + \mathcal{B}(u_n), u_n \rangle_{X^*,X} - \langle \mathcal{B}(u_n), u_n \rangle_{X^*,X} \\ &\to \langle f, u \rangle_{X^*,X} - \langle \mathcal{B}(u), u \rangle_{X^*,X} = \langle g, u \rangle_{X^*,X}.\end{aligned}$$

Da $\mathcal{A}$ die (M)-Bedingung erfüllt, besagt diese nun $g = \mathcal{A}(u) = f - \mathcal{B}(u)$, d.h. $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ erfüllt die (M)-Bedingung ebenfalls. □

Die (M)-Bedingung ist sehr allgemein und kann für eine Vielzahl von Operatoren nachgewiesen werden. Entscheidender Nachteil dieser Eigenschaft ist, dass diese nicht stabil unter der Summenbildung von Operatoren ist, d.h. erfüllen die Operatoren $A, B : X \to X^*$ die (M)-Eigenschaft, so besitzt i.a. die Summe $A + B$ nicht die (M)-Eigenschaft. Im Gegensatz dazu steht die Eigenschaft der Monotonie: sind die Operatoren $A, B : X \to X^*$ monoton, so ist auch die Summe $A + B$ monoton. Einen Ausweg liefert die Pseudo-Monotonie.

Zuvor betrachten wir ein Beispiel zum obigen Summensatz.

Beispiel 3.3.9. Wir betrachten das RWP

$$\begin{aligned} -\nabla\cdot(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) - \nabla\cdot\Phi(x,u) &= f, \quad x \in \Omega, \\ u &= 0, \quad x \in \partial\Omega, \end{aligned} \tag{3.16}$$

$\Phi : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ beschränkt mit glattem Rand. Die schwache Formulierung lautet $A(u) = f$ mit $A = \mathcal{A} + \mathcal{B} : X \to X^*$, $X = \overset{\circ}{\mathrm{H}}{}^1_p(\Omega)$ und $1 < p < \infty$, definiert durch

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{A}(u), v \rangle_{X^*,X} &= \int_\Omega (|\nabla u|^{p-2}\nabla u | \nabla v)\, dx, \quad v \in X, \\ \langle \mathcal{B}(u), v \rangle_{X^*,X} &= \int_\Omega (\Phi(x,u) | \nabla v)\, dx, \quad v \in X.\end{aligned}$$

Wir wissen bereits, dass $\mathcal{A}$ beschränkt, monoton, hemi-stetig und koerzitiv ist. Wir benötigen als erstes die Beschränktheit von $\mathcal{B}$, damit A beschränkt bleibt. Dies gewinnt man durch eine Wachstumsbedingung für Φ, d.h. wir nehmen an

$$|\Phi(x,u)| \le \phi_0(x) + \phi_1(x)|u|^s, \quad \forall u \in \mathbb{R}, \text{ f.a. } x \in \Omega,$$

wobei $s \ge 1$, $\phi_0 \in \mathrm{L}_{r_0}(\Omega;\mathbb{R}_+)$ und $\phi_1 \in \mathrm{L}_{r_1}(\Omega;\mathbb{R}_+)$ mit $r_0, r_1 \in [1,\infty]$. Diese Parameter müssen natürlich weiter eingeschränkt werden. Wir betrachten $r_1 = \infty$, damit s größtmöglichst gewählt werden kann. Weiterhin benötigt man wieder die Stetigkeit bzgl. der 2. Variable, d.h. $\Phi(x,\cdot) \in \mathrm{C}(\mathbb{R})$ für f.a. $x \in \Omega$. Wir rechnen nun Beschränktheit von $\mathcal{B}$ nach, d.h. die obige Definition ist sinnvoll. Es gilt

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{B}(u)\|_{X^*} &= \sup_{\|v\|_X \le 1} \langle \mathcal{B}(u), v\rangle_{X^*,X} = \sup_{\|v\|_X \le 1} \int_\Omega (\Phi(x,u)|\nabla v)\,dx \\
&\le \sup_{\|v\|_X \le 1} \int_\Omega \phi_0(x)|\nabla v|\,dx + \int_\Omega \phi_1(x)|u|^s|\nabla v|\,dx
\end{aligned}$$

Da $u \in X = \overset{\circ}{\mathrm{H}}{}^1_p(\Omega) \hookrightarrow \mathrm{L}_q(\Omega)$ mit

$$1 \le q \le p^* := \begin{cases} \frac{np}{n-p} & : 1 < p < n \\ \infty & : p \ge n \end{cases}$$

gilt, können wir wie folgt weiter abschätzen

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{B}(u)\|_{X^*} &\le \sup_{\|v\|_X \le 1} \|\phi_0\|_{\mathrm{L}_{p'}(\Omega)} \|\nabla v\|_{\mathrm{L}_p(\Omega;\mathbb{R}^n)} \\
&\quad + \sup_{\|v\|_X \le 1} \|\phi_1\|_{\mathrm{L}_\infty(\Omega)} \|u\|^s_{\mathrm{L}_{sp'}(\Omega)} \|\nabla v\|_{\mathrm{L}_p(\Omega;\mathbb{R}^n)} \\
&\le \|\phi_0\|_{\mathrm{L}_{p'}(\Omega)} + \|\phi_1\|_{\mathrm{L}_\infty(\Omega)} \|u\|^s_{\mathrm{L}_{sp'}(\Omega)}, \quad p' = \frac{p}{p-1}.
\end{aligned}$$

Damit ergeben sich die Bedingungen $p' = p/(p-1) \le r_0$ und $sp' = sp/(p-1) \le p^*$, d.h.

$$1 \le s \le \hat{p} := \frac{p^*}{p'} = \frac{p^*(p-1)}{p} = \begin{cases} \frac{n(p-1)}{n-p} & : 1 < p < n \\ \infty & : p \ge n \end{cases}.$$

Als nächstes suchen wir Bedingungen an Φ, so dass die starke Stetigkeit für $\mathcal{B}$ gesichert ist. (Damit genügt A der (M)-Bedingung.) Sei also $u_n \rightharpoonup u$ in X. Zeigen müssen wir $\mathcal{B}(u_n) \to \mathcal{B}(u)$. Da die schwache Konvergenz $u_n \rightharpoonup u$ in X recht wenig ist, benuzten wir Kompaktheit, um starke Konvergenz der Folge $(u_n)_n$ nutzen zu können. Da $(u_n)_n$ eine beschränkte Folge in X ist und

$$X = \overset{\circ}{\mathrm{H}}{}^1_p(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow \mathrm{L}_t(\Omega) \quad \text{für } 1 \le t < p^*,$$

haben wir $u_{n_k} \to u$ in $\mathrm{L}_t(\Omega)$ für $1 \leq t < p^*$. Mit dieser (starken) Konvergenz rechnen wir $\mathcal{B}(u_{n_k}) \to \mathcal{B}(u)$ nach. Betrachte also

$$\begin{aligned}\|\mathcal{B}(u_{n_k}) - \mathcal{B}(u)\|_{X^*} &= \sup_{\|v\|_X \leq 1} \int_\Omega ([\Phi(x, u_{n_k}) - \Phi(x, u)]|\nabla v)\, dx \\ &\leq \|\Phi(\cdot, u_{n_k}) - \Phi(\cdot, u)\|_{\mathrm{L}_{p'}(\Omega;\mathbb{R}^n)} \\ &\leq 2\|\phi_0\|_{\mathrm{L}_{p'}(\Omega)} + \|\phi_1\|_{\mathrm{L}_\infty(\Omega)}(\|u\|^s_{\mathrm{L}_{sp'}(\Omega)} + \|u_{n_k}\|^s_{\mathrm{L}_{sp'}(\Omega)}).\end{aligned}$$

Da die rechte Seite beschränkt ist (Beschränktheit der Folge $(u_{n_k})_k$ in X und $u \in X$), Φ stetig und $u_{n_k} \to u$ in $\mathrm{L}_t(\Omega)$ für $1 \leq t < p^*$, damit für eine Teilfolge $(u_{n'_k})_k$ von $(u_{n_k})_k$ auch $u_{n'_k} \to u$ f. ü. in Ω, bekommen wir mit der dominierten Konvergenz von Lebesgue

$$\lim_{k\to\infty} \|\Phi(x, u_{n'_k}) - \Phi(x, u)\|_{\mathrm{L}_{p'}(\Omega;\mathbb{R}^n)} = 0$$

für $1 \leq s < \hat{p}$. Dies gilt wieder für jede Teilfolge (Widerspruchsbeweis!).

Definition 3.3.5. *Sei X ein reflexiver Banachraum und $\mathcal{A} : X \to X^*$ ein Operator. Dann*

(a) (Wiederholung) erfüllt $\mathcal{A}$ die (M)-Bedingung, falls

$$\begin{matrix} x_n \rightharpoonup x, \quad \mathcal{A}_n \rightharpoonup f, \\ \langle \mathcal{A}(x_n), x_n\rangle_{X^*,X} \to \langle f, x\rangle_{X^*,X} \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{A}(x) = f.$$

(b) erfüllt $\mathcal{A}$ die (M')-Bedingung, falls

$$\begin{matrix} x_n \rightharpoonup x, \quad \mathcal{A}_n \rightharpoonup f, \\ \limsup \langle \mathcal{A}(x_n), x_n\rangle_{X^*,X} \leq \langle f, x\rangle_{X^*,X} \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{A}(x) = f.$$

(c) heisst $\mathcal{A}$ ψ-monoton (pseudo-monoton), falls

$$\begin{matrix} x_n \rightharpoonup x, \\ \limsup \langle \mathcal{A}(x_n), x_n - x\rangle_{X^*,X} \leq 0 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} \langle \mathcal{A}(x), x - y\rangle_{X^*,X} \leq \\ \liminf \langle \mathcal{A}(x_n), x_n - y\rangle_{X^*,X} \quad \forall y \in X. \end{matrix}$$

Bemerkung 3.3.5. Die (M')-Bedingung wird auch (M)-Bedingung genannt. Da der Begriff (M)-Bedingung schon benutzt wurde (siehe Lemma 3.3.3), wird hier die Bezeichnung (M')-Bedingung eingeführt. Es gilt $(M') \Rightarrow (M)$ und ist $\mathcal{A}$ zusätzlich monoton, dann sind die Begriffe (M) und (M') äquivalent.

Proof. Es gelte (M'). Wir wollen nun (M) zeigen. Sei also $x_n \rightharpoonup x$, $\mathcal{A}_n \rightharpoonup f$ und $\langle \mathcal{A}(x_n), x_n\rangle_{X^*,X} \to \langle f, x\rangle_{X^*,X}$. Letztere Konvergenz besagt aber

$$\limsup \langle \mathcal{A}(x_n), x_n\rangle_{X^*,X} = \lim \langle \mathcal{A}(x_n), x_n\rangle_{X^*,X} = \langle f, x\rangle_{X^*,X}$$

und (M') liefert $f = \mathcal{A}(u)$.
Sei jetzt $\mathcal{A}$ zusätzlich monoton. Wir wollen $(M) \Rightarrow (M')$ zeigen. Sei also $x_n \rightharpoonup x$, $\mathcal{A}(x_n) \rightharpoonup f$ und $\limsup \langle \mathcal{A}(x_n), x_n \rangle_{X^*,X} \leq \langle f, x \rangle_{X^*,X}$. Die Monotonie von $\mathcal{A}$ liefert folgende Ungleichung

$$\begin{gathered} \langle \mathcal{A}(x_n) - \mathcal{A}(x), x_n - x \rangle_{X^*,X} \geq 0 \\ \Leftrightarrow \\ \langle \mathcal{A}(x_n), x_n \rangle_{X^*,X} \geq \langle \mathcal{A}(x), x_n - x \rangle_{X^*,X} + \langle \mathcal{A}(x_n), x \rangle_{X^*,X}, \end{gathered}$$

und ergibt zusammen mit $x_n \rightharpoonup x$, $\mathcal{A}(x_n) \rightharpoonup f$ die Ungleichung

$$\begin{aligned} \liminf \langle \mathcal{A}(x_n), x_n \rangle_{X^*,X} &\geq \liminf \left(\langle \mathcal{A}(x), x_n - x \rangle_{X^*,X} + \langle \mathcal{A}(x_n), x \rangle_{X^*,X} \right) \\ &= \langle f, x \rangle_{X^*,X}, \end{aligned}$$

d.h. aber mit $\limsup \langle \mathcal{A}(x_n), x_n \rangle_{X^*,X} \leq \langle f, x \rangle_{X^*,X}$ das

$$\lim \langle \mathcal{A}(x_n), x_n \rangle_{X^*,X} = \langle f, x \rangle_{X^*,X}.$$

Anwendung der (M)-Eigenschaft liefert $\mathcal{A}(x) = f$. □

Lemma 3.3.5. *Sei X ein reflexiver Banachraum und $\mathcal{A} : X \to X^*$ ein Operator. Dann sind äquivalent*

(i) *$\mathcal{A}$ ist ψ-monoton.*

(ii)

$$\begin{matrix} x_n \rightharpoonup x, \\ \limsup \langle \mathcal{A}(x_n), x_n - x \rangle_{X^*,X} \leq 0 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} \mathcal{A}(x_n) \rightharpoonup \mathcal{A}(x), \\ \langle \mathcal{A}(x_n), x_n \rangle_{X^*,X} \to \langle \mathcal{A}(x), x \rangle_{X^*,X}. \end{matrix}$$

Proof. $(ii) \Rightarrow (i)$: Sei $x_n \rightharpoonup x$ und $\limsup \langle \mathcal{A}(x_n), x_n - x \rangle_{X^*,X} \leq 0$. Da (ii) gilt, wissen wir $\mathcal{A}(x_n) \rightharpoonup \mathcal{A}(x)$ und $\langle \mathcal{A}(x_n), x_n \rangle_{X^*,X} \to \langle \mathcal{A}(x), x \rangle_{X^*,X}$. Zu zeigen ist

$$\langle \mathcal{A}(x), x - y \rangle_{X^*,X} \leq \liminf \langle \mathcal{A}(x_n), x_n - y \rangle_{X^*,X} \quad \forall y \in X.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}(x_n), x_n - y \rangle_{X^*,X} &= \langle \mathcal{A}(x_n), x_n \rangle_{X^*,X} - \langle \mathcal{A}(x_n), y \rangle_{X^*,X} \\ &\to \langle \mathcal{A}(x), x \rangle_{X^*,X} - \langle \mathcal{A}(x), y \rangle_{X^*,X} \quad \forall y \in X. \end{aligned}$$

$(i) \Rightarrow (ii)$: Sei $x_n \rightharpoonup x$ und $\limsup \langle \mathcal{A}(x_n), x_n - x \rangle_{X^*,X} \leq 0$. Die ψ-Monotonie mit $y = x$ gibt:

$$0 \leq \liminf \langle \mathcal{A}(x_n), x_n - x \rangle_{X^*,X} \leq \limsup \langle \mathcal{A}(x_n), x_n - x \rangle_{X^*,X} \leq 0,$$

d.h. $\langle \mathcal{A}(x_n), x_n - x \rangle_{X^*,X} \to 0$. Sei $y \in X$ beliebig. Die ψ-Monotonie gibt

$$\langle \mathcal{A}(x), x - y \rangle_{X^*,X} \leq \liminf \langle \mathcal{A}(x_n), x_n - y \rangle_{X^*,X}$$

$$
\begin{aligned}
&\le \liminf \langle \mathcal{A}(x_n), x_n - x\rangle_{X^*,X} + \liminf \langle \mathcal{A}(x_n), x - y\rangle_{X^*,X} \\
&= 0 + \liminf \langle \mathcal{A}(x_n), x - y\rangle_{X^*,X}.
\end{aligned}
$$

Wähle nun $y = x \pm z$ mit $z \in X$ beliebig. Dann erhält man

$$
\begin{aligned}
y = x - z: &\quad \langle \mathcal{A}(x), z\rangle_{X^*,X} \le \liminf \langle \mathcal{A}(x_n), z\rangle_{X^*,X} \\
y = x + z: &\quad \langle \mathcal{A}(x), -z\rangle_{X^*,X} \le \liminf \langle \mathcal{A}(x_n), -z\rangle_{X^*,X} \\
&\Leftrightarrow \ \langle \mathcal{A}(x), z\rangle_{X^*,X} \ge \limsup \langle \mathcal{A}(x_n), z\rangle_{X^*,X}
\end{aligned}
$$

und damit für alle $z \in X$ die Ungleichungskette

$$
\langle \mathcal{A}(x), z\rangle_{X^*,X} \le \liminf \langle \mathcal{A}(x_n), z\rangle_{X^*,X} \le \limsup \langle \mathcal{A}(x_n), z\rangle_{X^*,X} \le \langle \mathcal{A}(x), z\rangle_{X^*,X}.
$$

Dies bedeutet $\mathcal{A}(x_n) \rightharpoonup \mathcal{A}(x)$. Zu zeigen bleibt noch die Konvergenz

$$
\langle \mathcal{A}(x_n), x_n\rangle_{X^*,X} \to \langle \mathcal{A}(x), x\rangle_{X^*,X}.
$$

Benutze dafür $\langle \mathcal{A}(x_n), x_n - x\rangle_{X^*,X} \to 0$ und $\mathcal{A}(x_n) \rightharpoonup \mathcal{A}(x)$:

$$
\begin{aligned}
\langle \mathcal{A}(x_n), x_n\rangle_{X^*,X} &= \langle \mathcal{A}(x_n), x_n - x\rangle_{X^*,X} + \langle \mathcal{A}(x_n), x\rangle_{X^*,X} \\
&\to 0 + \langle \mathcal{A}(x), x\rangle_{X^*,X}.
\end{aligned}
$$

□

Lemma 3.3.6. *Sei X ein reflexiver Banachraum, $A, B : X \to X^*$ Operatoren. Dann gilt:*

(i) A ist monoton und hemi-stetig $\Rightarrow$ A ist ψ-monoton;

(ii) A ist ψ-monoton $\Rightarrow$ A erfüllt die (M')-Bedingung (damit auch (M));

(iii) A ist stark stetig $\Rightarrow$ A ist ψ-monoton;

(iv) Falls A und B ψ-monoton sind, dann ist auch die Summe $A + B$ der beiden Operatoren ψ-monoton.

Die Rückrichtung der Implikationen in (i), (ii) und (iii) gelten i.a. nicht.

Proof. (iii) ist einfach. Da wir benutzen dürfen: $x_n \rightharpoonup x$ in X $\Rightarrow$ $A(x_n) \to A(x)$ in X^*. Sei also

$$
x_n \rightharpoonup x, \quad \limsup \langle A(x_n), x_n - x\rangle_{X^*,X} \le 0.
$$

Die starke Stetigkeit von A liefert jedoch schon

$$
\lim \langle A(x_n), x_n - y\rangle_{X^*,X} = \langle A(x), x - y\rangle_{X^*,X}, \quad \forall y \in X.
$$

(i): Sei A monoton und hemi-stetig. Sei wieder

$$
x_n \rightharpoonup x, \quad \limsup \langle A(x_n), x_n - x\rangle_{X^*,X} \le 0.
$$

Die Monotonie von A liefert die Ungleichung

$$\begin{aligned}\langle A(x_n), x_n - x\rangle_{X^*,X} &= \langle A(x_n) - A(x), x_n - x\rangle_{X^*,X} + \langle A(x), x_n - x\rangle_{X^*,X}\\ &\geq \langle A(x), x_n - x\rangle_{X^*,X}\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}\liminf\langle A(x_n), x_n - x\rangle_{X^*,X} &\geq \liminf\langle A(x), x_n - x\rangle_{X^*,X}\\ &= \lim\langle A(x), x_n - x\rangle_{X^*,X} = 0.\end{aligned}$$

Die Bedingungen der ψ-Monotonie (siehe oben) gibt nun

$$0 \leq \liminf\langle A(x_n), x_n - x\rangle_{X^*,X} \leq \limsup\langle A(x_n), x_n - x\rangle_{X^*,X} \leq 0,$$

d.h. aber $\lim\langle \mathcal{A}(x_n), x_n - x\rangle_{X^*,X} = 0$. Benutze wieder die Monotonie

$$\begin{gathered}\langle A(x_n) - A(x + \lambda(y - x)), x_n - (x + \lambda(y - x))\rangle_{X^*,X} \geq 0, \quad \forall y \in X\\ \Leftrightarrow\\ \begin{aligned}\lambda\langle A(x_n), x - y\rangle_{X^*,X} \geq\ & \lambda\langle A(x + \lambda(y - x)), x - y\rangle_{X^*,X}\\ &+ \langle A(x + \lambda(y - x)), x_n - x\rangle_{X^*,X}\\ &- \langle A(x_n), x_n - x\rangle_{X^*,X},\end{aligned}\end{gathered}$$

die nach Grenzübergang ($\liminf$) die Ungleichung liefert

$$\liminf\langle A(x_n), x - y\rangle_{X^*,X} \geq \langle A(x + \lambda(y - x)), x - y\rangle_{X^*,X}, \quad \forall y \in X.$$

Anwendung der Hemi-Stetigkeit von A führt auf

$$\liminf\langle A(x_n), x - y\rangle_{X^*,X} \geq \langle A(x), x - y\rangle_{X^*,X}, \quad \forall y \in X,$$

was zu zeigen war.
(ii): Es gelte

$$x_n \rightharpoonup x, \quad A(x_n) \rightharpoonup f, \quad \limsup\langle A(x_n), x_n - x\rangle_{X^*,X} \leq 0.$$

A ψ-monoton gibt für alle $y \in X$ die Ungleichung

$$\begin{aligned}\langle A(x), x - y\rangle_{X^*,X} &\leq \liminf\langle A(x_n), x_n - y\rangle_{X^*,X}\\ &= \liminf\left(\langle A(x_n), x_n - x\rangle_{X^*,X} + \langle A(x_n), x - y\rangle_{X^*,X}\right)\\ &\leq \liminf\langle A(x_n), x_n - x\rangle_{X^*,X} + \liminf\langle A(x_n), x - y\rangle_{X^*,X}\\ &\leq \limsup\langle A(x_n), x_n - x\rangle_{X^*,X} + \lim\langle A(x_n), x - y\rangle_{X^*,X}\\ &\leq 0 + \langle f, x - y\rangle_{X^*,X}.\end{aligned}$$

Wähle nun in dieser Ungleichung $y = x \pm z$ mit $z \in X$ beliebig. Damit erhält man

$$\mp\langle A(x), z\rangle_{X^*,X} \geq \mp\langle f, z\rangle_{X^*,X}, \quad \forall z \in X,$$

d.h. $\langle A(x), z\rangle_{X^*,X} = \langle f, x-y\rangle_{X^*,X}$ für alle $z \in X$, also $A(x) = f$.
(iv): Sei $x_n \rightharpoonup x$ und $\limsup\langle A(x_n) + B(x_n), x_n - x\rangle_{X^*,X} \leq 0$. Wir zeigen mit einem Widerspruchsbeweis zuerst, dass $\limsup\langle C(x_n), x_n - x\rangle_{X^*,X} \leq 0$ für $C \in \{A, B\}$ gilt, da dann die ψ-Monotonie von A, B benutzt werden kann. Angenommen dies gilt nicht, d.h. es gibt eine Teilfolge $(x_{n_k})_k$ von $(x_n)_n$, so dass (o.B.d.A.)

$$\lim\langle A(x_{n_k}), x_{n_k} - x\rangle_{X^*,X} > 0.$$

Damit muss aber

$$\limsup\langle B(x_{n_k}), x_{n_k} - x\rangle_{X^*,X} < 0$$

gelten. Die ψ-Monotonie von B ergibt

$$\begin{aligned} 0 = \langle B(x), x - x\rangle_{X^*,X} &\leq \liminf\langle B(x_{n_k}), x_{n_k} - x\rangle_{X^*,X} \\ &\leq \limsup\langle B(x_{n_k}), x_{n_k} - x\rangle_{X^*,X} < 0, \end{aligned}$$

ein Widerspruch. Die ψ-Monotonie von A und B liefert nun

$$\begin{aligned} \langle A(x), x - y\rangle_{X^*,X} &\leq \liminf\langle A(x_n), x_n - y\rangle_{X^*,X}, \quad \forall y \in X, \\ \langle B(x), x - y\rangle_{X^*,X} &\leq \liminf\langle B(x_n), x_n - y\rangle_{X^*,X}, \quad \forall y \in X. \end{aligned}$$

Addition der beiden Ungleichungen führt auf die gewünschte Ungleichung

$$\langle A(x) + B(x), x - y\rangle_{X^*,X} \leq \liminf\langle A(x_n) + B(x_n), x_n - y\rangle_{X^*,X}, \quad \forall y \in X.$$

□

Mit dem Lemma 3.3.6 können wir Gleichungen der Form

$$\mathcal{A}(u) + \mathcal{B}(u) = f, \quad \text{in } X^*$$

lösen, wobei $\mathcal{A}, \mathcal{B} : X \to X^*$ und die obige Gleichung ohne $\mathcal{B}$ gut verstanden ist. Genauer

Korollar 3.3.3. *Sei X ein reflexiver separabler Banachraum und $\mathcal{A}, \mathcal{B} : X \to X^*$ Operatoren. Es gelte*

(i) $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ sind beschränkt;

(ii) $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ sind ψ-monoton (oder typischerweise (stärker): $\mathcal{A}$ ist monoton und hemistetig, $\mathcal{B}$ ist ψ-monoton);

(iii) $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ ist koerzitiv.

Dann existiert für alle $f \in X^*$ eine Lösung $u \in X$ von

$$\mathcal{A}(u) + \mathcal{B}(u) = f \quad \text{in } X^*,$$

d.h. ist $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ surjektiv.