Skript zur Vorlesung

Parabolische Differentialgleichungen[1]

Sommersemester 2016

Universität Konstanz

Fachbereich Mathematik und Statistik

Stand: 22.07.2016

[1] Als Vorlage dient die wunderbare Vorlesung „Evolutionsgleichungen“ von Jan Prüß

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einführung

Ziel der Vorlesung ist die Behandlung von parabolischen Differentialgleichungen, die einen Spezialfall der Evolutionsgleichungen darstellen. Letztere beschreiben z.B. die zeitliche Entwicklung physikalischer Systeme. Man definiert dazu eine Zustandsgröße $u(t)$, die das System beschreibt bzw. jene Größen die von Interesse sind, und leitet dann eine Differentialgeichung mit Hilfe von physikalischen Prinzipien her. Die Hoffnung ist dann, dass die Differentialgleichung zusammen mit einem Anfangswert $u(0) = u_0$ den Zustand $u(t)$ des Systems für $t \geq 0$ bestimmt. Die allgemeine Form dieses sogenannten (abstrakten) Cauchy-Problems sieht wie folgt aus

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}u(t) &= F(t, u(t)), \quad t \geq 0, \\ u(0) &= u_0. \end{aligned}$$

Die Funktion $u : \mathbb{R}_+ \to X$ ist eine Abbildung in einem Banachraum X und die rechte Seite $F : M \subset \mathbb{R}_+ \times X \to X$ entspricht der „antreibenden Kraft“.

Beispiel 1.0.1 (Wärmeleitungsgleichung). Das erste Beispiel ist die zeitliche Entwicklung der Temperatur in einem Körper $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Die Zustandsgröße $\theta(t, x)$ ist die Temperatur zur Zeit t am Ort x. Energieerhaltung ergibt

$$\frac{d}{dt}e(t, x) = -\nabla \cdot q(t, x) + r(t, x), \quad t \geq 0, .$$

was eine Beziehung zwischen der inneren Energie e, den Wärmefluß q und den Wärmequellen r herstellt. Die innere Energie ist ein sogenanntes thermodynamisches Potential (enthält vollständig das Verhalten eines thermodynamischen Systems im Gleichgewicht), welches von den extensiven[1] Zustandsgrößen Entropie s, Volumen

[1]Eine extensive Größe ist eine Zustandsgröße, die sich mit der Größe des betrachteten Systems ändert. Gut verstehen kann man diese Terminologie anhand zweier identischer Systeme, die durch eine Zwischenwand getrennt sind und das betrachtete System sich aus beiden Teilsystemen zusammen setzt. Hebt man nun die Trennung auf, wird der Unterschied zwischen intensiven und extensiven Größen wie folgt definiert: Alle Größen, deren Wert unverändert durch Entfernung der Zwischenwand bleibt, sind intensive Größen; alle anderen Größen, die also einen anderen Wert annehmen, sind extensive Größen.

τ und Teilchenzahl Nabhängt. Ist $e = e(s, \tau, N)$ bekannt (Dies ist normalerweise nicht der Fall!), so ist die Temperatur θ definiert durch

$$\theta = \partial_s e.$$

Andere thermodynamische Größen sind

$$p = -\partial_\tau e \quad \text{Druck}, \quad \mu = \partial_N e \quad \text{chemisches Potential.}$$

Möchte man die Energie durch andere Zustandsgrößen ausdrücken, es gibt $2^3 = 8$ Möglichkeiten, so führt man „andere" thermodynamische Potentiale ein, die man alle ineinander überführen kann. Wir nehmen nun an

$$e = e_0 + \rho c \theta, \quad [e] = J \quad \text{(Joule)},$$

wobei e_0 eine Konstante ist (Grundenergie), c die spezifische Wärmekapazität[2] mit Einheit $[c] = J/(kgK)$ bezeichnet, $\rho = 1/\tau$ mit Einheit $[\rho] = kg$ die spezifische Dichte. Weiterhin gelte das Fourier Gesetz

$$q(t, x) = -k \nabla \theta(t, x),$$

welches besagt, dass Wärme in Richtung des Temperaturgradienten fließt und zwar direkt proportional zu $\nabla\theta$. Die Energiebilanz nimmt dann die Form an

$$\partial_t \theta - \beta \Delta \theta = R, \quad (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega,$$

$\beta = k/(\rho c)$ und $R = r/(\rho c)$, was Wärmeleitungsgleichung genannt wird. Um die zeitliche Entwicklung der Temperatur bestimmen zu können, benötigt man natürlich einen Anfangswert

$$\theta(0, x) = \theta_0(x), \quad x \in \Omega,$$

sowie was mit der Wärme an der Oberfläche des Körpers Ω passiert. Wir betrachten folgende Möglichkeiten

- der Körper befindet sich in einem Wasserbad bekannter Temperatur, d.h. man kennt θ auf $\mathbb{R}_+ \times \partial\Omega$,

$$\theta(t, x) = g(t, x), \quad (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \partial\Omega;$$

- der Körper ist isoliert, d.h. es wird weder Wärme abgegeben noch aufgenommen, bzw. man kennt den Wärmefluß durch die Oberfläche,

$$\partial_\nu \theta(t, x) = h(t, x), \quad (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega$$

  mit äußerer Normale $\nu(x)$ in $x \in \partial\Omega$;

[2] c misst die Fähigkeit eines Stoffes, thermische Energie zu speichern. Im Allgemeinen ist die spezifische Wärmekapazität von Zustandsgrößen, insbesondere von der Temperatur abhängig. Daher gelten Werte für die spezifische Wärmekapazität nur für eine bestimmte Temperatur.

- der Wärmefluß durch die Oberfläche genügt einem Strahlungsgesetz, z.B.

$$\partial_\nu \theta(t,x) = \alpha(\theta(t,x) - s(t,x)), \quad (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \partial\Omega.$$

Insgesamt erhält man z.B. das folgende Anfangsrandwertproblem

$$\begin{aligned} \rho c \partial_t \theta - \beta \Delta \theta &= R(t,x), \quad (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega, \\ \theta(t,x) &= g(t,x), \quad (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \partial\Omega; \\ \theta(0,x) &= \theta_0(x), \quad x \in \Omega. \end{aligned}$$

Beispiel 1.0.2 (Navier-Stokes-Gleichung).

Beispiel 1.0.3 (Reaktions-Diffusions-Gleichung).

Beispiel 1.0.4 (Cahn-Hilliard-Gleichung).

Kapitel 2

Das abstrakte Cauchy Problem

In diesem Abschnitt betrachten wir das einfachste lineare Cauchy-Problem, nämlich das autonome Problem

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}u(t) + Au(t) &= f(t), \quad t \geq 0, \\ u(0) &= x, \end{aligned} \tag{2.1}$$

wobei im folgenden X ein Banachraum (komplex) ist. Der Operator A ist dabei stets linear, dicht definiert, i.a. unbeschränkt, jedoch abgeschlossen, $x \in X$ und $f \in \mathrm{C}(J;X)$ mit $J = [0,a]$ oder $J = \mathbb{R}_+$. Es folgen einige wesentlche Eigenschaften.

2.1. Korrekt gestellte Cauchy-Probleme

Unter einer Lösung von (2.1) verstehen wir eine Funktion u für die (2.1) definiert und erfüllt ist, genauer

Definition 2.1.1. *Eine Funktion $u : J \to X$ wird starke Lösung von (2.1) genannt, falls $u \in \mathrm{C}^1(J;X) \cap \mathrm{C}(J;\mathcal{D}(A))$ gilt und (2.1) erfüllt ist.*

Eine Lösung besitzt genügend zeitliche Regulariät, $u \in \mathrm{C}^1(J;X)$, und genügend räumliche Regularität, $u \in \mathrm{C}(J;\mathcal{D}(A))$, so dass (2.1) erfüllt ist. Die Bezeichnung $u \in \mathrm{C}(J;\mathcal{D}(A))$ bedeutet, dass $u(t) \in \mathcal{D}(A)$ für alle $t \in J$ und $Au(t)$ stetig.

Berücksichtige, dass diese Definition sofort $x \in \mathcal{D}(A)$ impliziert, was i.a. zu restriktiv ist. Denkt man an ein physiklisches System, so ist X der Zustandsraum, $u(t)$ sein Zustand zur Zeit t, x der Anfangszustand und $f(t)$ eine externe Kraft zum Zeitpunkt t.
Es sollten mindestens die folgenden Eigenschaften erfüllt sein

- Existenz von Lösungen (das System ist realisiert)
- Eindeutigkeit (Determinismus/Kausalität)

- stetige Abhängigkeit (kleine Fehler ...)

Für das homogene Cauchy-Problem

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}u(t) + Au(t) = 0, \quad t \geq 0, \\ u(0) = x \end{aligned} \tag{2.2}$$

kann dies mathematisch wie folgt formuliert werden.

Definition 2.1.2. *Das abstrakte Cauchy-Problem (2.1) wird wohlgestellt genannt, falls für das homogene Cauchy-Problem (2.2) gilt:*

(i) zu jedem $x \in \mathcal{D}(A)$ genau eine starke Lösung $u(t; x)$ auf $\mathbb{R}_+$ existiert;

(ii) $(x_n)_n \subset \mathcal{D}(A)$, $x_n \to 0$ in X impliziert $u(t; x_n) \to 0$ in X, gleichmässig auf kompakten Teilintervallen von $\mathbb{R}_+$.

Ist das Cauchy-Problem (2.1) korrekt gestellt, dann lassen sich Operatoren $T(t)$ mittels

$$T(t)x := u(t; x), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad x \in \mathcal{D}(A) \tag{2.3}$$

definieren. Damit gilt $T(0) = I$ $(u(0; x) = x)$, $T(t)$ ist wohldefiniert (Eindeutgkeit der Lösung) und $T(t)$ ist linear, d.h. für $x, y \in \mathcal{D}(A)$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ gilt

$$T(t)(\alpha x + \beta y) = \alpha T(t)x + \beta T(t)y.$$

Die Gleichheit folgt aus der Linearität von A und der Zeitableitung und der Eindeutigkeit der Lösung. Die Operatoren $T(t)$ sind auch beschränkt, sogar gleichmässig auf kompakten Teilintervallen:
Angenommen dies sei nicht der Fall, so gibt es eine Folge $(y_n) \subset \mathcal{D}(A)$ mit $|y_n| = 1$, $r_n = |T(t_n)y_n| \to \infty$ und t_n beschränkt. Setze nun $x_n = y_n/r_n$, so gilt $(x_n) \subset \mathcal{D}(A)$ und $x_n \to 0$, aber $|u(t_n; x_n)| = |T(t_n)x_n| = |T(t_n)y_n/r_n| = 1$. Nach Eigenschaft *(ii)* gilt jedoch $T(t_n)x_n \to 0$, ein Widerspruch.

Darüberhinaus gilt die Halbgruppeneigenschaft

(H1) $T(t)T(s) = T(t + s)$ für alle $s, t \geq 0$;

(H2) $T(0) = I$;

(H3) $T(\cdot)x$ ist stetig auf $\mathbb{R}_+$ für jedes $x \in \mathcal{D}(A)$.

Diese Eigenschaften folgen wieder direkt aus der Definition 2.1.2. Wir zeigen $T(t + s) = T(t)T(s)$: sei $x \in \mathcal{D}(A)$ und $t, s \geq 0$ beliebig, $T(\cdot)x = u$ löse (2.2) mit Anfangswert x und v löse (2.2) mit Anfangswert $y := u(s, x)$. Dann gilt wegen der Eindeutigkeit

$$u(t + s; x) = v(t; y), \quad t \geq 0$$

und somit

$$T(t+s)x = T(t)y = T(t)T(s)x \quad \forall x \in \mathcal{D}(A).$$

Man kann $T(t)$ auch fortsetzen. Da $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$ vorausgesetzt ist und $T(t)$ beschränkt, können wir $T(t)$ auf X fortsetzen, ohne die Norm zu ändern. Die Fortsetzung wird wieder mit $T(t)$ bezeichnet.[1] Dann ist $T(t)x$ mit $x \in \overline{\mathcal{D}(A)}$ eine verallgemeinerte Lösung für (2.2).

2.2. C_0-Halbgruppen

Allgemein definiert man

Definition 2.2.1. *Sei X ein Banachraum. Eine Familie $\{T(t)\}_{t\geq 0} \subset \mathcal{B}(X)$ beschränkter linearer Operatoren wird C_0-Halbgruppe genannt, falls*

(H) $T(t)T(s) = T(t+s)$ *für alle* $s, t \geq 0$;

(C_0) $\lim_{t\to+0} T(t)x = x$, *für jedes* $x \in X$.

Auf dem ersten Blick scheint diese Definition schwächer zu sein, dies ist aber nicht der Fall, wie die folgende Proposition zeigt.

Proposition 2.2.1. *Sei X ein Banachraum und $\{T(t)\}_{t\geq 0} \subset \mathcal{B}(X)$ eine C_0-Halbgruppe. Dann gilt*

(i) Es gibt Konstanten $M > 0$, $\omega \in \mathbb{R}$, so dass $|T(t)| \leq Me^{\omega t}$ für alle $t \in \mathbb{R}_+$.

(ii) $T(\cdot)x$ ist stetig auf $\mathbb{R}_+$ für jedes $x \in X$, d.h. die Operator Familie $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ ist stark stetig.

(iii) $T(0) = I$.

Proof. Zu (i): Es gibt $M, \delta > 0$ derart, dass $|T(t)| \leq M$ für alle $t \in [0, \delta]$. Angenommen dies ist nicht der Fall, dann gibt es eine Folge $h_n \in [0, \delta]$, $h_n \to 0$ mit $|T(h_n)| \to \infty$. Dies steht im Widerspruch zu $|T(h_n)x| \leq |T(h_n)x - x| + |x| < \infty$

[1] Seien $D \subset X$ ein dichter Teilraum und Y ein Banachraum. Dann gibt es für jeden Operator $A \in \mathcal{B}(D, Y)$ genau eine stetige Fortsetzung $\tilde{A} \in \mathcal{B}(X, Y)$ mit $\tilde{A}_{|D} = A$ und $\|\tilde{A}\| = \|A\|$. Konstruktion: sei $x \in X$, dann gibt es $(x_n) \subset D$ mit $x_n \to x$ in X. Dann ist $(Ax_n) \subset Y$ Cauchy-Folge und wegen der Vollständigkeit gibt es $y_x \in Y$ mit $Ax_n \to y_x =: Ax$. Wohldefiniertheit/Unabhängigkeit von der Folge: sei $(\eta_n) \subset D$ ebenfalls mit $\eta_n \to x$ in X und damit $A\eta_n \to \eta_x$. Betrachte $|y_x - \eta_x| \leq |y_x - Ax_n| + |Ax_n - A\eta_n| + |A\eta_n - \eta_x| < 3\varepsilon$. $\tilde{A}_{|D} = A$: wähle zu $x \in D$ die Folge $(x_k)_k = (x)_k$. Dann $\tilde{A}x = \lim Ax_k = \lim Ax = Ax$. Eindeutigkeit: Seien $B \in \mathcal{B}(X, Y)$ mit $B_{|D} = A$ und $x \in X$ beliebig und $x_k \to x$ in X. Dann gilt: $Bx = B(\lim x_k) = \lim Bx_k = \lim Ax_k = \tilde{A}x$.

(berücksichtige C_0) für alle $x \in X$ und dem Satz von Banach-Steinhaus (Prinzip der gleichm. Beschränktheit) [2]

Für $t \in [n\delta, (n+1)\delta]$ gilt nun aufgrund der Eigenschaft (H)

$$\begin{aligned} |T(t)| &= |T(n\delta)T(t-n\delta)| = |T(\delta)^n T(n-\delta n)| \leq |T(\delta)|^n |T(t-n\delta)| \\ &\leq M^n |T(t-n\delta)| \leq M^n M = M(M^{1/\delta})^{n\delta} \leq M(M^{1/\delta})^t = Me^{\omega t}, \end{aligned}$$

wobei $\omega = \ln(M^{1/\delta})$. Da $n \in \mathbb{N}$ beliebig ist, folgt die Behauptung.
Zu (ii): Die Rechts-Stetigkeit folgt direkt aus (C_0) und (H). Sei $h > 0$, $t > 0$, $x \in X$ und $y = T(t)x \in X$, dann gilt

$$\lim_{h \to 0} T(t+h)x = \lim_{h \to 0} T(h)T(t)x = \lim_{h \to 0} T(h)y = y = T(t)x.$$

Für die Links-Stetigkeit benutzen wir noch *(i)*. Sei $h > 0$, $t - h > 0$ und $x \in X$, dann gilt

$$\begin{aligned} |T(t)x - T(t-h)x| &= |T(t-h)T(h)x - T(t-h)x| = |T(t-h)[T(h)x - x]| \\ &\leq |T(t-h)||T(h)x - x| \\ &\leq Me^{\omega(t-h)}|T(h)x - x| \to 0. \end{aligned}$$

Zu *(iii)*: Sei $x \in X$ beliebig und damit $T(0)x \in X$. Die C_0- und Halbgruppeneigenschaft liefern

$$x = \lim_{h \to +0} T(h)x = \lim_{h \to +0} T(h+0)x = \lim_{h \to +0} T(h)T(0)x = T(0)x.$$

□

Aufgrund von $1 = |I| = |T(0)| \leq M$ erfüllt die Konstante $M > 0$ aus *(i)* die Abschätzung $M \geq 1$.

Bisher haben wir zu jedem wohlgestellten Cauchy-Problem eine C_0-Halbgruppe zugeordnet. Ziel ist die umgekehrte Richtung, d.h. ausgehend von $T(t)$ werden wir einen Operator A_T konstruieren und dann einer C_0-Halbgruppe ein Cauchy-Problem zuordnen.

Definition 2.2.2. *Sei X ein Banachraum und die Operatorfamilie $\{T(t)\}_{t \geq 0} \subset \mathcal{B}(X)$ eine C_0-Halbgruppe. Der zugehörige Erzeuger A_T ist definiert durch*

$$A_T x := \lim_{h \to +0} \frac{T(h)x - x}{h} \tag{2.4}$$

mit Definitionsbereich $\mathcal{D}(A_T) = \{x \in X : \text{der Limes } (2.4) \text{ existiert}\}$.

[2] $\{B_n\}_n \subset \mathcal{B}(X)$ mit $\sup_n |B_n x| < \infty$ für alle $x \in X$, dann $\sup_n |B_n| < \infty$.

Die Menge $\mathcal{D}(A_T)$ ist nichtleer ($0 \in \mathcal{D}(A_T)$), nichttrivial ist, dass $\overline{\mathcal{D}(A_T)} = X$ und $T(t)$ durch A_T bereits eindeutig bestimmt ist.

Proposition 2.2.2. *Sei X ein Banachraum, $\{T(t)\}_{t\geq 0} \subset \mathcal{B}(X)$ eine C_0-Halbgruppe und A_T der zugehörige Erzeuger A_T. Dann gilt*

(i) $T(t)\mathcal{D}(A_T) \subset \mathcal{D}(A_T)$ *(Invarianz) und*

$$A_T T(t)x = T(t)A_T x \quad \forall x \in \mathcal{D}(A_T),\ t \geq 0;$$

(ii) für $x \in \mathcal{D}(A_T)$ ist $u(t) = T(t)x$ stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}_+$ und

$$\frac{d}{dt}T(t)x = A_T T(t)x;$$

(iii) A_T ist linear und abgeschlossen;

(iv) $\mathcal{D}(A_T)$ liegt dicht in X;

(v) $T(t)$ ist durch A_T eindeutig bestimmt.

Proof. Zu *(i)*: Zu zeigen ist $y := T(t)x \in \mathcal{D}(A_T)$ für $x \in \mathcal{D}(A_T)$ und $t \geq 0$. Dies folgt durch Grenzübergang $h \to +0$ in der Identität

$$\frac{T(h) - I}{h}y = \frac{1}{h}\left(T(t+h)x - T(t)x\right) = T(t)\frac{T(h) - I}{h}x, \quad x \in \mathcal{D}(A_T).$$

Zu *(ii)*: Dies Identität liefert ebenfalls für $t > 0$, $x \in \mathcal{D}(A_T)$ und $u(t) = T(t)x$, dass

$$\frac{d^+}{dt}u(t) = \lim_{h\to+0}\frac{u(t+h) - u(t)}{h} = \lim_{h\to+0}\frac{T(h)y - y}{h} = A_T y = A_T u(t).$$

Andererseits gilt aufgrund der starken Stetigkeit von $T(t)$ für $t > 0$ und $x \in \mathcal{D}(A_T)$

$$\begin{aligned}
\frac{d^-}{dt}u(t) &= \lim_{h\to+0}\frac{u(t) - u(t-h)}{h} \\
&= \lim_{h\to+0}\left[\frac{T(t)x - T(t-h)x}{h} - T(t-h)A_T x\right] + \lim_{h\to+0} T(t-h)A_T x \\
&= \lim_{h\to+0} T(t-h)\left[\frac{T(h)x - x}{h} - A_T x\right] + T(t)A_T x = A_T T(t)x,
\end{aligned}$$

da $\lim_{h\to+0} T(t-h)A_T x = A_T x$ existiert und

$$\begin{aligned}
|T(t-h)[h^{-1}(T(h)x - x) - A_T x]| &\leq |T(t-h)||h^{-1}(T(h)x - x) - A_T x| \\
&\leq Me^{\omega(t-h)}|h^{-1}(T(h)x - x) - A_T x| \to 0,
\end{aligned}$$

und damit ist (ii) bewiesen.
Zu (iii): A_T ist linear aufgrund der Definition. Abgeschlossenheit: sei $(x_n) \subset \mathcal{D}(A_T)$ mit $x_n \to x$ in X und $A_T x_n \to y$ in X. Dann liefert (i) und (ii):

$$\begin{aligned}\frac{T(h)x_n - x_n}{h} &= \frac{1}{h}\int_0^h \frac{d}{ds}T(s)x_n\,ds = \frac{1}{h}\int_0^h A_T T(s)x_n\,ds \\ &= \frac{1}{h}\int_0^h T(s)A_T x_n\,ds \underset{n\to\infty}{\to} \frac{1}{h}\int_0^h T(s)y\,ds,\end{aligned}$$

wobei dieser Limes gleichmässig für $0 < h \leq 1$ ist. Dies sieht man durch die Abschätzung

$$\begin{aligned}|\frac{1}{h}\int_0^h T(s)[A_T x_n - y]\,ds| &\leq \frac{1}{h}M\int_0^h e^{\omega s}\,ds|A_T x_n - y| \\ &\leq \frac{1}{h}\frac{M}{|\omega|}|e^{\omega h} - 1||A_T x_n - y| \\ &\leq Me^{|\omega|}|A_T x_n - y|, \quad h \in (0,1].\end{aligned}$$

Damit können die Grenzprozesse vertauscht werden und die Stetigkeit von $T(t)y$ liefert

$$\frac{T(h)x - x}{h} = \frac{1}{h}\int_0^h T(s)y\,ds \to y \quad \text{für} \quad h \to 0,$$

d.h. $x \in \mathcal{D}(A_T)$ und $y = A_T x$.
Zu *(iv)*: Dafür definieren wir die Menge

$$E = \{\int_0^\infty \phi(s)T(s)x\,ds : x \in X, \phi \in \mathrm{C}_0^\infty((0,\infty))\} \subset X.$$

Für ein Element $y \in E$ und $h > 0$ klein genug erhält man

$$\begin{aligned}\frac{T(h)y - y}{h} &= \frac{1}{h}\left(\int_0^\infty \phi(s)T(s+h)x\,ds - \int_0^\infty \phi(s)T(s)x\,ds\right) \\ &= \frac{1}{h}\int_0^\infty [\phi(s-h) - \phi(s)]T(s)x\,ds \\ &= -\int_0^\infty \frac{\phi(s-h) - \phi(s)}{-h}T(s)x\,ds\end{aligned}$$

und damit für $h \to +0$ sehen wir $y \in \mathcal{D}(A_T)$ sowie

$$A_T y = -\int_0^\infty \phi'(s)T(s)x\,ds \in E, \quad E \subset \bigcap_{n\geq 1} D(A_T^n).$$

Wir zeigen nun, dass E dicht in X liegt. Sei dazu $x^* \perp E$, d.h.

$$0 = \langle x^*, \int_0^\infty \phi(s)T(s)x\,ds\rangle_{X^*,X} = \int_0^\infty \phi(s)\langle x^*, T(s)x\rangle_{X^*,X}\,ds,$$

für alle $x \in X, \phi \in \mathrm{C}_0^\infty((0,\infty))$. Da $\mathrm{C}_0^\infty((0,\infty))$ dicht in $\mathrm{L}_2((0,\infty))$ liegt, folgt

$$\langle x^*, T(s)x\rangle_{X^*,X} = 0, \quad \forall s \in [0,1], \quad \forall x \in X$$

und mit $T(0) = I$ schliesslich $\langle x^*, x\rangle_{X^*,X} = 0$ für alle $x \in X$, d.h. aber $x^* = 0$.
Zu *(iv)*: Angenommen es gibt zwei C_0-Halbgruppen $T(t)$, $S(t)$ mit Erzeuger A_T. Für $x \in \mathcal{D}(A_T)$ und $t \geq s \geq 0$ gilt nun

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}T(t-s)S(s)x &= T(t-s)S'(s)x - T'(t-s)S(s)x \\ &= T(t-s)A_T S(s)x - A_T T(t-s)S(s)x = 0\end{aligned}$$

wegen *(i)* und *(ii)*, d.h. $T(t-s)S(s)x$ ist konstant für $s \in [0,t]$. Die Spuren $s = 0$ und $s = t$ liefern

$$T(t-s)S(s)x_{|s=0} = T(t)x = T(t-s)S(s)x_{|s=t} = S(t)x, \quad \forall t > 0, \quad \forall x \in \mathcal{D}(A_T).$$

Da $\mathcal{D}(A_T)$ dicht in X liegt, erhalten wir $T(t) = S(t)$ für $t > 0$. □

2.3. Korrektheit und Erzeuger

In diesem Abschnitt wird der Äquivalenz zwischen korrekten Cauchy-Problemen und Erzeugung von C_0-Halbgruppen nachgegangen.

Theorem 2.3.1. *Es sei X ein Banachraum und $A : \mathcal{D}(A) \subset X \to X$ ein linearer, dicht definierter Operator. Dann gelten*

(i) Ist das Cauchy-Problem (2.2) für A korrekt gestellt, dann ist A abschliessbar und sein Abschluss $\overline{A}$ ist der negative Erzeuger einer eindeutigen C_0-Halbgruppe $T(t)$ in X.

(ii) Falls $T(t)$ eine C_0-Halbgruppe in X ist, dann ist das Cauchy-Problem (2.2) für den zugehörigen negativen Erzeuger wohlgestellt.

Ist A zusätzlich abgeschlossen, dann ist das Cauchy-Problem (2.2) für A wohlgestellt, genau dann wenn A der negative Erzeuger einer C_0-Halbgruppe $T(t)$ in X ist.

Proof. Zu *(i)*: Das korrekt gestellte Cauchy-Problem (2.2) definiert eine C_0-Halbgruppe $T(t)$ mittels (2.3); sei A_T der Erzeuger von $T(t)$. Es gilt $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(A_T)$ und $Ax = -A_T x$ für $x \in \mathcal{D}(A)$ (kurz $A \subset -A_T$), denn einerseits ist $u(t;x) = T(t)x$ mit $x \in \mathcal{D}(A)$ Lösung von $u' + Au = 0$, $u(0) = x$ und andererseits nach Proposition 2.2.2 gilt

$$Au(t) = -\frac{d}{dt}u(t) = -\frac{d}{dt}T(t)x \underset{(ii)}{=} -A_T T(t)x = -A_T u(t), \quad t \geq 0$$

und damit für $t = 0$: $Ax = -A_T x$. Dies zeigt auch, dass $-A_T$ eine abgeschlossene Fortsetzung von A ist, also $\overline{A} \subset -A_T$ (Proposition 2.2.2 (iii)). Damit ist A notwendigerweise abschliessbar. Wir zeigen nun $\overline{A} = -A_T$. Dafür benötigen wir die Identität (Integration der Gleichung (2.2))

$$\begin{aligned} T(t)x - x &= -\int_0^t AT(s)x\,ds \\ &\underset{A\subset\overline{A}}{=} -\int_0^t \overline{A}T(s)x\,ds = -\overline{A}\int_0^t T(s)x\,ds, \quad \forall x \in \mathcal{D}(A)\,. \end{aligned}$$

Da $\mathcal{D}(A)$ dicht in X liegt, ist diese Identität auch richtig für alle $x \in X$. Dies halten wir fest

$$T(t)x - x = -\int_0^t \overline{A}T(s)x\,ds = -\overline{A}\int_0^t T(s)x\,ds, \quad \forall x \in X. \tag{2.5}$$

Sei nun $x \in \mathcal{D}(A_T)$, dann liegt

$$x_h := -\frac{1}{h}\int_0^h T(s)x\,dx, \quad h > 0,$$

in $D(\overline{A})$ (wegen (2.5)) und es gilt $x_h \to x$ für $h \to +0$ ($T(s)x$ ist stetig!). Andererseits gilt für $x \in \mathcal{D}(A_T)$

$$\overline{A}x_h = -\overline{A}\frac{1}{h}\int_0^h T(s)x\,dx = -\frac{T(h)x - x}{h}$$

und die rechte Seite konvergiert gegen $-A_T x$. Somit gilt $x \in D(\overline{A})$ und $\overline{A}x = -A_T x$.

Zu *(ii)*: Sei $T(t)$ eine C_0-Halbgruppe mit Erzeuger A_T und $x \in \mathcal{D}(A_T)$ beliebig. Dann löst nach Proposition 2.2.2 *(ii)* die stetig differenzierbare Funktion $u(t;x) = T(t)x$ das Cauchy-Problem (2.2) mit $A = -A_T$. Die Eindeutigkeit der Lösung folgt durch folgende Betrachtung. Sei v ebenfalls eine Lösung mit Anfangswert x; dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}T(t-s)v(s) &= T(t-s)v'(s) - A_T T(t-s)v(s) \\ &= T(t-s)A_T v(s) - T(t-s)A_T v(s) = 0, \quad t-s \geq 0, s \geq 0, \end{aligned}$$

und damit ist $T(t-s)v(s)$ konstant für alle $t \geq s \geq 0$. Einsetzen von $t = s$ und $s = 0$ ergibt

$$T(t)x = T(t-s)v(s)_{|s=0} = T(t-s)v(s)_{|t=s} = T(0)v(t) = v(t).$$

Für die Korrektheit fehlt noch die stetige Abhängigkeit der Anfangsdaten, d.h. für $(x_n)_n \subset \mathcal{D}(A_T)$ mit $x_n \to 0$ folgt $u(t;x_n) = T(t)x_n \to 0$ in X, gleichmässig auf kompakten Teilintervallen von $\mathbb{R}_+$. Nach Proposition 2.2.2 wissen wir $|T(t)| \leq Me^{\omega t}$. Dies impliziert $|u(t;x_n)| \leq Me^{\omega t}|x_n|$ und für kompakte Intervalle $I = [t_0, t_1] \subset \mathbb{R}_+$

$$\max_{t\in I}|u(t;x_n)| \leq Me^{\omega_0}|x_n| \underset{n\to\infty}{\to} 0, \quad \omega_0 = \max\{\omega t_0, \omega t_1\}.$$

$\square$

Einige Bezeichnungen:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{S}(X,M,\omega) = \{T : T \text{ ist } C_0\text{-Halbgruppe in } X \text{ mit } |T(t)| \le Me^{\omega t}\}\\
&\mathcal{G}(X,M,\omega) = \{A : A \text{ erzeugt } T \in \mathcal{S}(X,M,\omega)\}\\
&\mathcal{S}(X,\omega) = \bigcup_{M\ge 1} \mathcal{S}(X,M,\omega), \quad \mathcal{S}(X) = \bigcup_{\omega\in\mathbb{R}} \mathcal{S}(X,\omega),\\
&\mathcal{G}(X,\omega) = \bigcup_{M\ge 1} \mathcal{G}(X,M,\omega), \quad \mathcal{G}(X) = \bigcup_{\omega\in\mathbb{R}} \mathcal{G}(X,\omega).
\end{aligned}$$

Beispiel 2.3.1. $A \in \mathcal{B}(X)$. Definiere

$$T(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}(tA)^j, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Man rechne nach, dass $T(t+s) = T(t)T(s)$ und sogar

$$|T(t) - I| \to 0 \quad t \to 0.$$

Damit ist $T(t)$ sogar $\mathcal{B}(X)$-stetig in $t = 0$ und auch für jedes $t \in \mathbb{R}$. Schliesslich gilt

$$\lim_{h\to 0} \frac{T(h) - I}{h} = \lim_{h\to 0} \sum_{j=1}^{\infty} h^{j-1}A^j = A \quad \in \mathcal{B}(X).$$

Beispiel 2.3.2. Sei $X = \mathrm{C}_0(\mathbb{R}_+)$ und T definiert durch

$$(T(t)\phi)(s) = \phi(t+s), \quad \phi \in \mathrm{C}_0(\mathbb{R}_+), \quad s \ge 0.$$

Dann ist T eine C_0-Halbgruppe. Wie lautet der Erzeuger?

Beispiel 2.3.3. Sei $X = \mathrm{BUC}(\mathbb{R})$[3], $a, b > 0$ und

$$(T(t)\phi)(s) = e^{-at} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(at)^n}{n!} \phi(s - nb).$$

Zeigen Sie, dass T eine C_0-Halbgruppe ist und bestimmen Sie deren Erzeuger.

Beispiel 2.3.4. Sei $\alpha \in \mathbb{C}$, $\beta > 0$ und $T(t)$ eine C_0-Halbgruppe mit Erzeuger A_T.

- Zeigen Sie, dass $S(t) = e^{-\alpha t}T(t)$ eine C_0-Halbgruppe ist mit Erzeuger $A_T - \alpha I$.
- Zeigen Sie, dass $S(t) = T(\beta t)$ eine C_0-Halbgruppe ist mit Erzeuger βA_T.

[3] $\mathrm{BUC}(\mathbb{R}) = \{v \in \mathrm{C}(\mathbb{R}) : v \text{ ist beschränkt und gleichm. stetig auf } \mathbb{R}\}$ wird mit der Norm $\sup_{t\in\mathbb{R}} |v(t)|$ zum Banachraum.

2.4. Variation der Konstanten

Wir wenden uns nun dem Cauchy-Problem (2.1) zu. Dazu sei $A \in \mathcal{G}(X)$ mit Banachraum X. Damit ist das Cauchy-Problem (2.2) korrekt gestellt. Wir leiten nun eine Darstellungsformel für Lösungen von (2.1) her. Dazu sei $T(t)$ die von $-A$ erzeugte C_0-Halbgruppe und $u(t)$ eine Lösung von (2.1). Dann erhält man

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}[T(t-s)u(s)] &= T(t-s)u'(s) + T(t-s)Au(s)\\ &= T(t-s)[u'(s)+Au(s)] = T(t-s)f(s), \quad t \geq s \geq 0.\end{aligned}$$

Integration bzgl. $s \in [0,t]$ dieser Identität liefert

$$T(t-s)u(s)|_0^t = u(t) - T(t)u(0) = u(t) - T(t)x = \int_0^t T(t-s)f(s)\,ds,$$

also

$$u(t) = T(t)x + \int_0^t T(t-s)f(s)\,ds. \tag{2.6}$$

Die Formel (2.6) heisst Formel der Variation der Konstanten. Daraus erkennen wir folgendes

- Lösungen von (2.1) sind eindeutig bestimmt;
- Lösungen von (2.1) hängen stetig von den Daten $x \in X$ und $f \in \mathrm{C}(J;X)$ ab.

Es besteht jedoch die Frage, wann (2.6) wirklich Lösungen von (2.1) liefert.

Theorem 2.4.1. *Sei $A \in \mathcal{G}(X)$, $T(t)$ die von A erzeugte C_0-Halbgruppe, $x \in X$ und $f \in \mathrm{C}(J;X)$. Dann sind die folgenden Aussagen für die durch (2.6) definierte Funktion u äquivalent*

(a) u ist Lösung von (2.1) in J.

(b) $u \in \mathrm{C}(J;\mathcal{D}(A))$.

(c) $u \in \mathrm{C}^1(J;X)$.

Sind $x \in \mathcal{D}(A)$ und $f = f_1 + f_2$ mit $f_1 \in \mathrm{C}^1(J;X)$ und $f_2 \in \mathrm{C}(J;\mathcal{D}(A))$, dann ist u Lösung von (2.1).

Proof. Wir zeigen zuerst die letzte Aussage, d.h. es werden die Fälle $f \in \mathrm{C}^1(J;X)$ und $f \in \mathrm{C}(J;\mathcal{D}(A))$ betrachtet. Beachten Sie, dass aufgrund der Voraussetzung $A \in \mathcal{G}(X)$ der lineare Operator A dicht definiert und abgeschlossen ist. Sei o.B.d.A. $x = 0$, denn wir wissen, dass $T(t)x$ genau die Lösung von (2.2) für $x \in \mathcal{D}(A)$ ist.

Ist $f \in \mathrm{C}(J;\mathcal{D}(A))$ und u gegeben durch (2.6), dann ist $u \in \mathrm{C}(J;\mathcal{D}(A))$ wegen der Darstellung (2.6) und es gilt

$$\begin{aligned}\frac{1}{h}[u(t+h)-u(t)] &= \frac{1}{h}[\int_0^{t+h} T(t+h-s)f(s)\,ds - \int_0^t T(t-s)f(s)\,ds] \\ &= \frac{1}{h}[T(h)\int_0^t T(t-s)f(s)\,ds - \int_0^t T(t-s)f(s)\,ds] \\ &+ \frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(t+h-s)f(s)\,ds \\ &= \frac{T(h)-I}{h}u(t) + \frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(t+h-s)f(s)\,ds\end{aligned} \tag{2.7}$$

für $t \geq 0, h > 0$. Der Grenzübergang $h \to +0$ zeigt[4], dass

$$\frac{d^+}{dt}u + Au = f, \quad t \geq 0$$

gilt. Für die linkseitige Ableitung benutzt man die Identität

$$\begin{aligned}\frac{1}{h}[u(t)-u(t-h)] &= \frac{1}{h}[\int_0^t T(t-s)f(s)\,ds - u(t-h)] \\ &= \frac{T(h)-I}{h}u(t-h) + \frac{1}{h}\int_{t-h}^t T(t-s)f(s)\,ds\end{aligned} \tag{2.8}$$

für $t > h > 0$. Grenzübergang $h \to +0$ liefert

$$\frac{d^-}{dt}u + Au = f, \quad t > 0.$$

Damit löst u das Cauchy-Problem (2.1) und $u \in \mathrm{C}^1(J;X)$.

Ist $f \in \mathrm{C}^1(J;X)$, dann ist $u \in \mathrm{C}^1(J;X)$ aufgrund der Identität

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}u(t) = \frac{d}{dt}\int_0^t T(t-s)f(s)\,ds &= f(t) + \int_0^t \frac{d}{dt}T(t-s)f(s)\,ds \\ &= f(t) + \int_0^t -\frac{d}{ds}[T(t-s)f(s)] + T(t-s)f'(s)\,ds \\ &= T(t)f(0) + \int_0^t T(t-s)f'(s)\,ds.\end{aligned}$$

Da nun $u \in \mathrm{C}^1(J;X)$ gilt, zeigt (2.7) und (2.8), dass $u \in \mathrm{C}(J;\mathcal{D}(A))$ und Lösung des Cauchy-Problems ist.

Die Äquivalenzen folgen nun einfach aus (2.7). $\square$

[4] Benutze starke Stetigkeit von $T(t)$: $1/h\int_t^{t+h} T(t+h-s)f(s)\,ds \to T(t-t)f = f$ für $h \to 0$ in jedem Stetigkeitspunkt von f.

Als nächstes wollen wir ein neues Lösungskonzept einführen, welches im Zusammenhang mit (2.6) steht.

Definition 2.4.1. *Sei $A : \mathcal{D}(A) \subset X \to X$ ein linearer Operator, $x \in X$ und $f \in \mathrm{L}_{1,loc}(\mathbb{R}_+; X)$. Eine Funktion $u \in \mathrm{C}(\mathbb{R}_+; X)$ wird milde Lösung von (2.1) genannt, wenn es Folgen $(x_n) \subset \mathcal{D}(A)$, $(f_n) \subset \mathrm{L}_{1,loc}(\mathbb{R}_+; X)$ und starke Lösungen u_n von (2.1) mit Anfangswert x_n und rechter Seite f_n gibt, so dass $x_n \to x$ in X und $f_n \to f$ in $\mathrm{L}_{1,loc}(\mathbb{R}_+; X)$ die Konvergenz $u_n \to u$ in $\mathrm{C}(\mathbb{R}_+; X)$ impliziert.*

Klar ist, dass starke Lösungen auch milde Lösungen sind, jedoch die umgekehrte Aussage gilt i.a. nicht. Wir nehmen nun an, dass $-A \in \mathcal{G}(X)$ und u milde Lösung von (2.1) ist. Die Definition 2.4.1 besagt, dass es starke Lösungen u_n von (2.1) gibt mit rechten Seiten $(f_n) \subset \mathrm{L}_{1,loc}(\mathbb{R}_+; X)$ und Anfangswert $(x_n) \subset \mathcal{D}(A)$, so dass $u_n \to u$ in X, lokal gleichmässig in $\mathbb{R}_+$ und $f_n \to f \in \mathrm{L}_{1,loc}(\mathbb{R}_+; X)$, $x_n \to x \in X$. Die starken Lösungen u_n erfüllen auch die Gleichung

$$u_n(t) = T(t)x_n + \int_0^t T(t-s)f_n(s)\, ds, \quad t \geq 0,$$

und nach Grenzübergang erfüllt u ebenfalls (2.6) (benutze Proposition 2.2.1/starke Stetigkeit von $T(t)$). Dies zeigt die Eindeutigkeit der milden Lösung und die stetige Abhängigkeit von den Daten.

Theorem 2.4.2. *Sei $-A \in \mathcal{G}(X)$ Erzeuger der C_0-Halbgruppe $T(t)$, $x \in X$ und $f \in \mathrm{L}_{1,loc}(\mathbb{R}_+; X)$. Dann ist u, definiert durch (2.6), die eindeutige milde Lösung von (2.1). Die Abbildung $(x, f) \mapsto u$ ist stetig und es gilt die Abschätzung*

$$|u(t)| \leq \sup_{0 \leq t \leq a} |T(t)| \left(|x| + \|f\|_{\mathrm{L}_1([0,a];X)}\right), \quad 0 \leq t \leq a, \tag{2.9}$$

für jedes $a > 0$. Für $f \in \mathrm{C}(\mathbb{R}_+; X)$ gilt die Abschätzung

$$|u(t)| \leq \max\{\sup_{0 \leq t \leq a} |T(t)|, \int_0^a |T(s)|\, ds\} \left(|x| + \|f\|_{\mathrm{C}([0,a];X)}\right), \quad 0 \leq t \leq a. \tag{2.10}$$

Liegt f sogar in $\mathrm{W}^1_{1,loc}(\mathbb{R}_+; X) + [\mathrm{L}_{1,loc}(\mathbb{R}_+; \mathcal{D}(A)) \cap \mathrm{C}(\mathbb{R}_+; X)]$ und $x \in \mathcal{D}(A)$, dann ist u starke Lösung von (2.1).

Proof. Die obigen Abschätzungen sind einfach zu erhalten. Das u, gegeben durch (2.6), milde Lösung ist, sieht man wie folgt. Als erstes wählen wir $(x_n) \subset \mathcal{D}(A)$ mit $x_n \to x \in X$ ($\overline{\mathcal{D}(A)} = X$!) und $f_n \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}_+; \mathcal{D}(A))$ mit $f_n \to f$ in $\mathrm{L}_{1,loc}(\mathbb{R}_+; X)$[5]. Die Funktionen u_n definiert durch

$$u_n(t) = T(t)x_n + \int_0^t T(t-s)f_n(s)\, ds, \quad t \geq 0,$$

[5] Konstruktion: wähle Stufenfunktionen $\tilde{f}_n$ mit Werten in $\mathcal{D}(A)$, dann gilt schon einmal $\tilde{f}_n \in \mathrm{L}_{1,loc}(\mathbb{R}_+; \mathcal{D}(A))$ und $f_n \to f$ in $\mathrm{L}_{1,loc}(\mathbb{R}_+; X)$. Mit Mollifiers erhält man $f_n = \phi * \tilde{f}_n \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}_+; \mathcal{D}(A))$ und wieder die Konvergenz $f_n \to f$ in $\mathrm{L}_{1,loc}(\mathbb{R}_+; X)$.

konvergieren gegen u, definiert durch (2.6), in X und gleichmässig auf kompakten Intervallen, da

$$\begin{aligned} |u_n(t) - u(t)| &= |T(t)[x_n - x] + \int_0^t T(s)[f_n(t-s) - f(t-s)]\,ds| \\ &\leq \sup_{0\leq s\leq a} |T(s)| \left(|x_n - x| + \int_0^t |f_n(s) - f(s)|\,ds \right), \quad 0 \leq t \leq a \end{aligned}$$

für jedes $a > 0$. Da $x_n \in \mathcal{D}(A)$ und $f_n \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}_+; \mathcal{D}(A))$, wissen wir, dass die Funktionen u_n in $\mathrm{C}^1(\mathbb{R}_+; X) \cap \mathrm{C}(\mathbb{R}_+; \mathcal{D}(A))$, $n \geq 1$, liegen. Daraus folgt mit Theorem 2.4.1, dass u_n, $n \geq 1$, starke Lösungen von (2.1) sind und u definiert durch (2.6) die eindeutige milde Lösung von (2.1).
Sei nun $f \in \mathrm{W}^1_{1,loc}(\mathbb{R}_+; X)$[6] und $x \in \mathcal{D}(A)$. Die Linearität zeigt, dass $x = 0$ angenommen werden kann, da $T(t)x$ starke Lösung von (2.2) ist. Die Indentität (siehe Beweis von Theorem 2.4.1)

$$u'(t) = T(t)f(0) + \int_0^t T(t-s)f'(s)\,ds$$

gilt auch für $f \in \mathrm{W}^1_{1,loc}(\mathbb{R}_+; X)$ und somit $u \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}_+; X)$. Das Theorem 2.4.1 liefert sofort $u \in \mathrm{C}(J; \mathcal{D}(A))$ bzw. u ist starke Lösung von (2.1). Sei nun $f \in \mathrm{L}_{1,loc}(\mathbb{R}_+; \mathcal{D}(A)) \cap \mathrm{C}(\mathbb{R}_+; X)$, dann liefert (2.6), dass $u \in \mathrm{C}(\mathbb{R}_+; \mathcal{D}(A))$ und Theorem 2.4.1 gibt $u \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}_+; X)$ bzw. u ist starke Lösung von (2.1). □

[6] Es gilt die Einbettung $\mathrm{W}^1_1(J; X) \hookrightarrow \mathrm{C}(J; X)$, da für $g \in \mathrm{W}^1_1(J; X)$: $g(t) = g(s) + \int_s^t g'(\tau)\,d\tau$ für f.a. $t \geq s \geq 0$.

Kapitel 3

Erzeuger von C_0-Halbgruppen

Wir gehen nun der zentralen Frage nach, ob ein gegebener Operator A eine C_0-Halbgruppe erzeugt. Eine Charakterisierung solcher Operatoren ist wünschenswert.

3.1. Resolvente und Spektrum

Zur Erinnernung: Sei $B : D(B) \subset X \to X$ ein linearer abgeschlossener Operator und damit auch $\lambda I - B$ für jedes $\lambda \in \mathbb{C}$. Ist $\lambda I - B$ invertierbar und $R(\lambda) := R(\lambda, B) := (\lambda I - B)^{-1} \in \mathcal{B}(X)$, dann gehört $\lambda \in \mathbb{C}$ zur Resolventenmenge $\rho(B)$ von B, d.h. wir setzen

$$\rho(B) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \ \lambda I - B : D(B) \subset X \to X \text{ ist bijektiv und } R(\lambda) \in \mathcal{B}(X)\ \},$$
$$\sigma(B) := \mathbb{C} \backslash \rho(B) \quad \text{Spektrum von } B.$$

Es gilt sogar $R(\lambda) : X \to D(B)$, $\rho(B)$ ist eine offene Teilmenge von $\mathbb{C}$ und $R(\lambda)$ ist (stückweise) holomorph für $\lambda \in \rho(B)$. „Stückweise“ berücksichtigt, dass $\rho(B)$ nicht zusammenhängend sein muss. Jede Zusammenhangskomponente von $\rho(B)$ ist der natürliche Def.-Bereich für $R(\cdot)$ und $R(\cdot)$ kann nicht analytisch über den Rand von $\rho(B)$ fortgesetzt werden. Weiterhin gelten folgende Identitäten für $\lambda, \mu \in \rho(B)$

$$BR(\lambda, B)x = R(\lambda, B)Bx, \quad \forall x \in D(B),$$
$$R(\lambda, B) - R(\mu, B) = (\mu - \lambda)R(\lambda, B)R(\mu, B),$$

wobei letztere Identiät zeigt, dass Resolventen kommutieren. Es seien noch zwei Implikationen erwähnt, nämlich *(i) ist $\rho(B) \neq \varnothing$, dann ist B abgeschlossen*, und *(ii) ist B abgeschlossen und $\lambda - B$ bijektiv, dann ist $\lambda \in \rho(B)$*.

Das Spektrum wird oft weiter zerlegt. Wie anfangs vorausgesetzt sei $B : \mathcal{D}(B) \subset X \to X$ ein linearer abgeschlossener Operator. Beachte, dass $\lambda \in \sigma(B)$ bedeutet, dass entweder $\lambda I - B$ nicht invertierbar ist oder invertierbar, aber das Bild von $\lambda I - B$ nur eine Teilmenge von X ist.

$$\sigma_p(B) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - B \text{ ist nicht injektiv}\} \quad \text{(Eigenwerte von } B\text{)},$$

$$\begin{aligned}
\sigma_c(B) &= \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - B \text{ ist injektiv, } \overline{\mathcal{R}(\lambda I - B)} = X, \text{ aber } \mathcal{R}(\lambda I - B) \neq X\},\\
\sigma_r(B) &= \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - B \text{ ist injektiv, aber } \overline{\mathcal{R}(\lambda I - B)} \neq X\},\\
\sigma_{app}(B) &= \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - B \text{ ist nicht nach unten beschränkt }\}\\
&= \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - B \text{ nicht injektiv oder } \mathcal{R}\,(\lambda I - B) \text{ ist nicht abgeschlossen}\}\\
&= \{\lambda \in \mathbb{C} : \exists (x_n) \subset D(B), |x_n| = 1 : \lim_{n\to\infty} \lambda x_n - Bx_n = 0 \text{ in } X\} \supset \sigma_p(B),\\
\sigma_{ess}(B) &= \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - B \text{ ist kein Fredholm-Operator}\},
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\sigma_{discr}(B) &= \sigma(B)\backslash\sigma_{ess}(B) \subset \sigma_p(B)\\
&= \{\lambda \in \sigma_p(B) : \dim \mathcal{N}(\lambda I - B) < \infty \text{ und } \exists \varepsilon > 0 :\\
&\qquad \mu \in \sigma(B), |\lambda - \mu| < \varepsilon \;\Rightarrow\; \mu = \lambda\}.
\end{aligned}$$

Mit den obigen Beziehungen gilt

$$\sigma(B) = \sigma_p(B) \cup \sigma_c(B) \cup \sigma_r(B) = \sigma_{ess}(B) \cup \sigma_{discr}(B).$$

3.2. Sektorielle Operatoren

Im folgenden werden sektorielle Operatoren eine wichtige Rolle spielen.

Definition 3.2.1 (Sektorielle Operatoren)**.** *Sei X ein komplexer Banachraum und $A : \mathcal{D}\,(A) \subset X \to X$ ein abgeschlossener Operator. A wird sektorieller Operator genannt, falls*

(S1) $\overline{\mathcal{D}\,(A)} = X$, $\mathcal{N}(A) = \{0\}$, $\overline{\mathcal{R}(A)} = X$, $(-\infty, 0) \subset \rho(A)$;

(S2) $|t(tI + A)^{-1}| \leq M$ *für alle* $t > 0$ *und ein gewisses* $M < \infty$.

Die Menge der sektoriellen Operatoren wird mit $\mathcal{S}\,(X)$ bezeichnet. Falls nur die Bedingung (S2) gilt, dann heißt A pseudo-sektoriell. Bez. $\mathcal{PS}\,(X)$.

Sei A ein pseudo-sektorieller Operator, also $A \in \mathcal{PS}\,(X)$. Dann ist die Operator-Familie $\{A(t+A)^{-1}\}_{t>0} \subset \mathcal{B}(X)$ gleichmässig beschränkt, da $A(t+A)^{-1} = I - t(t+A)^{-1}$ und somit $|A(t+A)^{-1}| \leq 1 + M$ für alle $t > 0$. Für $x \in \mathcal{D}\,(A)$ gilt

$$t(t + A)^{-1}x - x = -A(t + A)^{-1}x = -(t + A)^{-1}Ax \to_{t\to\infty} 0,$$

da $|(t+A)^{-1}Ax| \leq \frac{M}{t}|Ax|$. Der Satz von Banach-Steinhaus [1] liefert nun $\lim_{t\to\infty} t(t+A)^{-1}x = x$ für alle $x \in \overline{\mathcal{D}\,(A)}$, insbesondere für $\overline{\mathcal{D}\,(A)} = X$ gilt

$$\lim_{t\to\infty} t(t + A)^{-1}x = x, \quad \forall x \in X. \tag{3.1}$$

[1] Seien X und Y Banachräume und $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{B}(X, Y)$. $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert punktweise gegen einen stetigen linearen Operator genau dann, wenn die beiden Bedingungen erfüllt sind: (i) $\|T_n\| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$, (ii) $\exists X_0 \subseteq X$ ein linearer Unterraum mit $\overline{X_0} = X$, so dass $T_n x$ konvergiert in Y für alle $x \in X_0$.

Für $y = Ax \in \mathcal{R}(A)$ haben wir

$$A(t+A)^{-1}y - y = -t(t+A)^{-1}y = -tA(t+A)^{-1}x \to 0 \quad t \to 0.$$

Anwendung des Satzes von Banach-Steinhaus liefert $\lim_{t\to 0} A(t+A)^{-1}y = y$ für alle $y \in \overline{\mathcal{R}(A)}$, insbesondere für $\overline{\mathcal{R}(A)} = X$ gilt

$$\lim_{t\to 0} A(t+A)^{-1}x = x, \quad \forall x \in X. \tag{3.2}$$

Andererseits gilt für $x \in \mathcal{N}(A)$ die Identität

$$t(t+A)^{-1}x = x - A(t+A)^{-1}x = x - (t+A)^{-1}Ax = x$$

und dies zeigt, dass $\mathcal{N}(A) \cap \overline{\mathcal{R}(A)} = \{0\}$, da für $Ax = 0$ mit $x \in \overline{\mathcal{R}(A)}$ und $t > 0$ gilt

$$t(t+A)^{-1}x = x \quad \Leftrightarrow \quad x - A(t+A)^{-1}x = x \quad \Leftrightarrow \quad A(t+A)^{-1}x = 0$$

und der Grenzübergang $t \to 0$ mit $x \in \overline{\mathcal{R}(A)}$ zeigt $x = 0$.

Sei im folgenden X ein reflexiver Banachraum, $x \in X$, und $A \in \mathcal{PS}(X)$. Als erstes zeigen wir $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$, da dann (3.1) folgt. Dazu sei $(t_n)_n \subset (0,\infty)$ eine beliebige Folge mit $t_n \to \infty$. Da die Folge $\{t_n(t_n+A)^{-1}x\}_n$ beschränkt in X ist, gibt es eine Teilfolge $(t_{n_k})_k$, diese hängt i.a. von x ab, so dass $t_n(t_n+A)^{-1}x \rightharpoonup y \in X$, wobei wir die Teilfolge wieder mit t_n bezeichnet wurde. Da $(t+A)^{-1}$ ein stetiger Operator in X ist, gilt[2]

$$t_n(t_n+A)^{-1}(t+A)^{-1}x \rightharpoonup (t+A)^{-1}y, \quad \forall t > 0.$$

Die Resolventenidentität liefert

$$\begin{aligned} t_n(t_n+A)^{-1}(t+A)^{-1}x &= t_n(t_n-t)^{-1}[(t+A)^{-1} - (t_n+A)^{-1}]x \\ &= \frac{1}{1-t/t_n}\left((t+A)^{-1}x - t_n^{-1}[t_n(t_n+A)^{-1}x]\right) \rightharpoonup (t+A)^{-1}x \end{aligned}$$

und die Eindeutigkeit der Grenzwerte zeigt $(t+A)^{-1}x = (t+A)^{-1}y$ und dies wiederum $x = y$, d.h.

$$t(t+A)^{-1}x \rightharpoonup x \quad \text{für} \quad t \to \infty.$$

Daraus können wir schlussfolgern, dass $\mathcal{D}(A)$ schwach dicht in X ist (d.h. für alle $x \in X$ gibt es $(x_n)_n \subset \mathcal{D}(A)$ mit $x_n \rightharpoonup x$), denn für $x \in X$ wähle $x_n = t_n(t_n +$

[2] Sei X ein reflexiver Banachraum und $A \in \mathcal{B}(X)$. Dann ist $A^* \in \mathcal{B}(X^*)$ mit $|A^*| = |A|$ und $x_n \rightharpoonup x$ impliziert $Ax_n \rightharpoonup Ax$. Betrachte dazu einfach $\langle x^*, Ax_n - Ax\rangle_{X^*,X} = \langle A^*x^*, x_n - x\rangle_{X^*,X}$.

$A)^{-1}x \in \mathcal{D}(A)$. Damit ist $\mathcal{D}(A)$ auch stark dicht[3] und mit der Argumentation auf Seite 20 zur Formel (3.1) erhalten wir ebenso wieder

$$t(t+A)^{-1}x \underset{t\to\infty}{\to} x, \quad \forall x \in X.$$

Für $t = 0$ gehen wir ähnlich vor, wobei wir $X = \mathcal{N}(A) \oplus \overline{\mathcal{R}(A)}$ zeigen werden. Für $x \in X$ beliebig aber fest und $t_n \to 0$ ist die Folge $A(t_n + A)^{-1}x$ beschränkt und damit $A(t_n + A)^{-1}x \rightharpoonup y$ für ein gewisses $y \in X$. Da $t(t+A)^{-1} \in \mathcal{B}(X)$ gilt, wissen wir ebenfalls

$$A(t_n + A)^{-1}t(t+A)^{-1}x \rightharpoonup t(t+A)^{-1}y \in X.$$

Die Resolventenidentität

$$A(t_n + A)^{-1}t(t+A)^{-1}x = \frac{t}{t-t_n}\left(A(t_n+A)^{-1} - A(t+A)^{-1}\right)x$$

mit Grenzübergang $t_n \to 0$

$$A(t_n + A)^{-1}t(t+A)^{-1}x \rightharpoonup y - A(t+A)^{-1}x$$

liefert die Gleichheit der Grenzwerte

$$y - A(t+A)^{-1}x = t(t+A)^{-1}y$$

bzw.

$$y - t(t+A)^{-1}y = A(t+A)^{-1}x = x - t(t+A)^{-1}x, \quad \forall t > 0$$
$$\Leftrightarrow$$
$$0 = [x-y] - t(t+A)^{-1}[x-y], \quad \forall t > 0.$$

Daraus erkennt man, dass $x - y \in \mathcal{D}(A)$ aufgrund von $A[x-y] = tA(t+A)^{-1}[x-y] \in X$ für $t > 0$, und sogar $x - y \in \mathcal{N}(A)$ wegen

$$0 = [x-y] - t(t+A)^{-1}[x-y] = A(t+A)^{-1}[x-y] = (t+A)^{-1}A[x-y].$$

Nutzen wir diese Eigenschaft bzw. $A(t+A)^{-1}x = A(t+A)^{-1}y$, so erhält man

$$A(t_n + A)^{-1}y = A(t_n + A)^{-1}x \rightharpoonup y$$

und damit auch

$$t_n(t_n + A)^{-1}y = y - A(t_n + A)^{-1}y \rightharpoonup 0.$$

[3] Angenommen nicht, dann $\exists x^* \in X^*$, $x^* \neq 0$, mit $\langle x^*, x\rangle = 0$ für alle $x \in \mathcal{D}(A)$, insbesondere $\langle x^*, x_n\rangle = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $x_n = t_n(t_n + A)^{-1}x \in \mathcal{D}(A)$. Wir wissen jedoch $0 = \langle x^*, x_n\rangle \to \langle x^*, x\rangle$ für alle $x \in X$, ein Widerspruch.

Mit diesen Teilergebnissen folgern wir, dass $\mathcal{N}(A)+\mathcal{R}(A)$ schwach dicht in X ist, denn die Identität

$$x=[x-y]+(t_n+A)(t_n+A)^{-1}y=[x-y]+t_n(t_n+A)^{-1}y+A(t_n+A)^{-1}x$$

führt auf

$$x-\big([x-y]+A(t_n+A)^{-1}x\big)=t_n(t_n+A)^{-1}y\rightharpoonup 0.$$

wobei $x-y\in\mathcal{N}(A)$ und $A(t_n+A)^{-1}x\in\mathcal{R}(A)$. Schwache Dichtheit impliziert wieder starke Dichtheit, also $X=\overline{\mathcal{N}(A)+\mathcal{R}(A)}$. Da der schwache Grenzwert der Folge $\{A(t_n+A)^{-1}x\}_n$ gleich y ist, und starker und schwacher Grenzwert übereinstimmen, gilt: Für jedes $x\in X$ gibt es ein $y\in\overline{\mathcal{R}(A)}$, so dass

$$A(t_n+A)^{-1}x=A(t_n+A)^{-1}y\to y\quad\text{(siehe Formel oberhalb (3.2))}$$

gilt.[4] Setzen wir $Px:=y\in\overline{\mathcal{R}(A)}$, so gilt

$$P_tx:=A(t+A)^{-1}x\underset{t\to 0}{\to}Px\quad\forall x\in X.$$

Der Operator P ist beschränkt in X, d.h. $P\in\mathcal{B}(X)$, was durch den Satz von Banach-Steinhaus gesichert ist. Denn $|P_t|\leq 1+M$ und die punktweise Konvergenz $P_tx\to y$ für alle $x\in X$ der Familie von Operatoren $\{P_t\}_{0<t\leq 1}\subset\mathcal{B}(X)$ liefert den obigen Grenzwert von P_t und es gilt $|P|\leq\inf_{0<t\leq 1}|P_t|<\infty$. Oben haben wir gezeigt $\mathcal{R}(P)\subset\overline{\mathcal{R}(A)}$ sowie $\mathcal{R}(I-P)\subset\mathcal{N}(A)$. Die Identität $P_tx=P_ty=P_tPx$ liefert für $t\to 0$, dass $P^2=P$ gilt, d.h P ist eine Projektion auf $\overline{\mathcal{R}(A)}$ entlang $\mathcal{N}(A)$. Somit haben wir gezeigt

$$X=\mathcal{N}(A)\oplus\overline{\mathcal{R}(A)}$$

und (nur für reflexive Banachräume X) $\mathcal{R}(A)$ ist dicht in X, genau dann wenn $\mathcal{N}(A)=\{0\}$. Wir fassen zusammen.

Proposition 3.2.1. *Sei X ein Banachraum und $A\in\mathcal{PS}(X)$. Dann gilt $\mathcal{N}(A)\cap\overline{\mathcal{R}(A)}=\{0\}$ und*

$$\lim_{t\to\infty}t(t+A)^{-1}x=x,\quad\forall x\in\overline{\mathcal{D}(A)},$$
$$\lim_{t\to 0}A(t+A)^{-1}x=x,\quad\forall x\in\overline{\mathcal{R}(A)}.$$

Damit ist ein pseudo-sektorieller Operator A sektoriell, genau dann wenn $\mathcal{D}(A)$ und $\mathcal{R}(A)$ dicht in X sind.

[4] Berücksichige hierbei, dass obige Rechnung zuerst für $x\in\mathcal{N}(A)+\mathcal{R}(A)$ durchgeführt wird, wobei die Dichtheit $\overline{\mathcal{N}(A)+\mathcal{R}(A)}=X$ diesen Schritt dann für jedes $x\in X$ erlaubt, d.h. für $x=x_0+y_0\in\mathcal{N}(A)+\mathcal{R}(A)$ gilt $A(t+A)^{-1}x\to y_0\in\mathcal{R}(A)$ für $t\to 0$. Für allgemeines $x\in X$ ist dieser Grenzwert dann in $\overline{\mathcal{R}(A)}$ und die Gleichheit von schwachem und starkem Grenzwert zeigt, dass dieser y sein muss.

Ist X zusätzlich reflexiv, dann

$$\lim_{t\to\infty} t(t+A)^{-1}x = x, \quad \forall x \in X,$$
$$\lim_{t\to 0} A(t+A)^{-1}x = Px, \quad \forall x \in X,$$

wobei $P : X \to \overline{\mathcal{R}(A)}$ die Projektion auf $\overline{\mathcal{R}(A)}$ entlang $\mathcal{N}(A)$ und $X = \mathcal{N}(A) \oplus \overline{\mathcal{R}(A)}$. Somit gilt für reflexive Banachräume X: ist $A \in \mathcal{PS}(X)$ mit $\mathcal{N}(A) = \{0\}$, dann gilt schon $A \in \mathcal{S}(A)$.

Für allgemeine Banachräume X und sektorielle Operatoren gilt

$$\overline{\mathcal{D}(A^n) \cap \mathcal{R}(A^n)} = X, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Wir führen nun den Sektor in der komplexen Ebene ein. Die Menge $\Sigma_\theta \subset \mathbb{C}$ bezeichnet den offenen symmetrisch Sektor bzgl. der positiven Halbachse $\mathbb{R}_+$ mit Scheitelpunkt 0 und Öffungswinkel 2θ, d.h. wir setzen

$$\Sigma_\theta := \{z \in \mathbb{C}\backslash\{0\} : |\arg(z)| < \theta\}.$$

Für $A \in \mathcal{PS}(X)$ gilt in der Tat $\rho(-A) \supset \Sigma_\theta$ mit einem $\theta > 0$ und

$$\sup\{|\lambda(\lambda + A)^{-1}| : |\arg(\lambda)| < \theta\} < \infty.$$

Dies folgt durch die Taylorentwicklung mit $\frac{d}{dt}(t+A)^{-1} = (-1)^n n!(t+A)^{-(n+1)}$, $t > 0$,

$$(\lambda + A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\lambda - t)^n (t + A)^{-(n+1)}.$$

Die Ungleichung/Abschätzung aus (S2) liefert

$$|(\lambda + A)^{-1}| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda - t|^n \frac{M^n}{t^n} = \frac{M}{t} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{M|\lambda - t|}{t}\right)^n.$$

Die Reihe konvergiert, falls $|\lambda/t - 1| < 1/M$ gilt. Setzt man $\lambda = re^{i\phi}$ und minimiert man $|\lambda/t - 1|$, so erhält man $t = r/\cos(\phi)$ und damit die Bedingung $|\lambda/t - 1| = |\sin(\phi)| < 1/M$. Definiere nun den Spektralwinkel ϕ_A von $A \in \mathcal{PS}(X)$ gemäß

$$\phi_A = \inf\{\phi : \rho(-A) \supset \Sigma_{\pi-\phi}, \sup_{\lambda \in \Sigma_{\pi-\phi}} |\lambda(\lambda + A)^{-1}| < \infty\}.$$

Es gilt $\phi_A \in [0, \pi)$ und $\phi_A \geq \sup\{|\arg(\lambda)| : \lambda \in \sigma(A)\}$.

3.3. Das Hille-Yosida-Theorem

Sei $T(t)$ eine C_0-Halbgruppe in X. Wir wissen, dass es nach Proposition 2.2.1 Konstanten $M \geq 1$ und $\omega \in \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$|T(t)| \leq Me^{\omega t}, \quad \forall t \geq 0.$$

Daher definiert man die Wachstumsabzisse

$$\omega_0(A) = \inf\{\omega \in \mathbb{R} : \exists M_\omega \geq 1, \text{ so dass } |T(t)| \leq M_\omega e^{\omega t}, \, \forall t \geq 0\},$$

wobei $A \in \mathcal{G}(X)$ der Erzeuger der C_0-Halbgruppe T ist. Es gelten folgende Relationen

- $\omega_0(A) = \inf_{t>0} t^{-1} \log(|T(t)|) = \lim_{t\to\infty} t^{-1} \log(|T(t)|)$.
- Ist $\omega_0(A) > -\infty$, so gilt $|T(t)| \geq e^{\omega_0(A)t}$ für $t \geq 0$.
- $spr(T(t)) = e^{\omega_0(A)t}$.

Aufgrund der obigen Abschätzung existiert nun das Integral

$$R_\lambda x := \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x \, dx, \quad \mathfrak{Re}\lambda > \omega \tag{3.3}$$

absolut, (3.3) definiert eine Familie beschränkter Operatoren R_λ, und es gilt

$$|R_\lambda| \leq M \int_0^\infty e^{-\mathfrak{Re}\lambda t + \omega t} \, dt = M(\mathfrak{Re}\lambda - \omega)^{-1}.$$

Für $x \in \mathcal{D}(A)$ gilt

$$\begin{aligned} R_\lambda Ax &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} AT(t)x \, dt = -\int_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{d}{dt} T(t)x \, dt \\ &= -e^{-\lambda t} T(t)x|_0^\infty - \lambda R_\lambda x = x - \lambda R_\lambda x, \end{aligned}$$

und für $x \in X$

$$\begin{aligned} \frac{T(h) - I}{h} R_\lambda x &= \frac{1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t+h)x \, dt - \frac{1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x \, dt \\ &\underset{Subst.}{=} \frac{1}{h} \int_h^\infty e^{-\lambda(t-h)} T(t)x \, dt - \frac{1}{h} R_\lambda x \\ &= \frac{1}{h}(e^{\lambda h} - 1) R_\lambda x - e^{\lambda h} \frac{1}{h} \int_0^h e^{-\lambda t} T(t)x \, dt \\ &\to \lambda R_\lambda x - T(0)x, \quad h \to +0. \end{aligned}$$

Damit ist $R_\lambda x \in \mathcal{D}(A)$ für alle $x \in X$ und $-AR_\lambda x = \lambda R_\lambda x - x$. Daraus können wir ablesen

- $\lambda \in \rho(-A)$,
- $R_\lambda = (\lambda I + A)^{-1}$, $\mathfrak{Re}\lambda > \omega$.

Proposition 3.3.1. *Sei $T \in \mathcal{S}(X, M, \omega)$ mit Erzeuger $-A$. Dann gilt*

(a) $\rho(-A) \supset \mathbb{C}_\omega := \{z \in \mathbb{C} : \mathfrak{Re} z > \omega\}$*;*

(b) die Resolvente von $-A$ ist durch

$$(\lambda + A)^{-1} = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)\, dt \tag{3.4}$$

gegeben und genügt der Abschätzung

$$|(\lambda + A)^{-1}| \leq \frac{M}{\mathfrak{Re}\lambda - \omega}, \quad \mathfrak{Re}\lambda > \omega.$$

Leider sind die Bedingungen nicht hinreichend. Dafür gibt es ein Gegenbeispiel.

Um eine hinreichende Bedingung für $-A \in \mathcal{G}(X)$ zu bekommen, betrachten wir die Resolvente. Für $T \in \mathcal{S}(X, M, \omega)$ gilt

$$\begin{aligned}\int_0^\infty t^n e^{-\lambda t} T(t)\, dt &= (-1)^n \frac{d^n}{d\lambda^n} \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)\, dt \\ &= (-1)^n \frac{d^n}{d\lambda^n} (\lambda + A)^{-1} = n!(\lambda + A)^{-(n+1)}.\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich die Abschätzung

$$\begin{aligned}|(\lambda + A)^{-(n+1)}| &\leq \frac{1}{n!} \int_0^\infty t^n e^{-\mathfrak{Re}\lambda t} |T(t)|\, dt \leq M \int_0^\infty \frac{t^n}{n!} e^{-\mathfrak{Re}\lambda t + \omega t}\, dt \\ &= M(-1)^n \frac{d^n}{d(\mathfrak{Re}\lambda)^n} \int_0^\infty e^{-\mathfrak{Re}\lambda t + \omega t}\, dt \\ &= M(-1)^n \frac{d^n}{d(\mathfrak{Re}\lambda)^n} (\mathfrak{Re}\lambda - \omega)^{-1} \\ &= M(\mathfrak{Re}\lambda - \omega)^{-(n+1)}, \quad \mathfrak{Re}\lambda > \omega, \quad n \in \mathbb{N}_0.\end{aligned}$$

Diese Abschätzung führt zu den richtigen Bedingungen.

Theorem 3.3.1. *Sei $A : \mathcal{D}(A) \subset X \to X$ ein abgeschlossener, linearer, dicht definierter Operator im Banachraum X. Dann sind äquivalent*

(i) $-A \in \mathcal{G}(X, M, \omega)$.

(ii) $\rho(-A) \supset (\omega, \infty)$ *und es gilt die Abschätzung*

$$|(\lambda + A)^{-n}| \leq M(\lambda - \omega)^{-n}, \quad \forall \lambda > \omega, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{3.5}$$

Proof. Die Beweisrichtung *(i)* $\Rightarrow$ *(ii)* wurde oben schon bewiesen.
(ii) $\Rightarrow$ *(i)*: zuerst definieren wir die Yosida-Approximationen für A gemäß

$$A_\lambda := \lambda A(\lambda + A)^{-1} = \lambda I - \lambda^2(\lambda + A)^{-1}, \quad \lambda > \omega.$$

Nach Voraussetzung sind diese Operatoren beschränkt, sie kommutieren, d.h. es gilt $A_\lambda A_\mu = A_\mu A_\lambda$ für $\lambda, \mu > \omega$, und sie konvergieren auf $\mathcal{D}(A)$ gegegen A, also

$$A_\lambda x \underset{\lambda\to\infty}{\longrightarrow} Ax \quad \forall x \in \mathcal{D}(A).$$

Dies folgt aus Proposition 3.2.1, wo gezeigt wurde, dass $\lambda(\lambda + A)^{-1}x \to x$ für $\lambda \to \infty$ und $x \in \overline{\mathcal{D}(A)}$ gilt. Wir betrachten nun die von $\{-A_\lambda\}_{\lambda>\omega}$ erzeugten C_0-Halbgruppen,

$$T_\lambda(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(-A_\lambda t)^n.$$

(a) Abschätzung von $T_\lambda(t)$. Im ersten Schritt rechnen wir nach, in welcher Weise $T_\lambda(t)$ beschränkt ist. Genauer, wir sind an der Abhängigkeit von λ interessiert. Es gilt

$$T_\lambda(t) \underset{\text{Def. v. } A_\lambda}{=} e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \lambda^{2n}(\lambda + A)^{-n} t^n$$

und damit

$$\begin{aligned} |T_\lambda(t)| &\le e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \lambda^{2n} M(\lambda - \omega)^{-n} t^n = M e^{-\lambda t} e^{\lambda^2(\lambda-\omega)^{-1}t} = M e^{\frac{\lambda\omega}{\lambda-\omega}t} \\ &= M e^{\frac{\omega}{1-\omega/\lambda}t} \le M e^{2\omega t}, \quad \forall t \ge 0, \quad \lambda > 2\omega. \end{aligned}$$

(b) Abschätzung von $T_\lambda(t)x - T_\mu(t)x$. Betrachte dazu

$$\frac{d}{ds} T_\lambda(t-s)T_\mu(s) = T_\lambda(t-s)(A_\lambda - A_\mu)T_\mu(s).$$

Integration über $[0, t]$ führt auf

$$T_\lambda(t) - T_\mu(t) = \int_0^t T_\lambda(t-s)(A_\lambda - A_\mu)T_\mu(s)\, ds$$

und damit auf die Abschätzung

$$\begin{aligned} |T_\lambda(t)x - T_\mu(t)x| &\le \int_0^t M e^{2\omega(t-s)} M e^{2\omega s} |(A_\lambda - A_\mu)x|\, ds \\ &\le M^2 e^{2\omega t} t |(A_\lambda - A_\mu)x|, \quad \forall x \in \mathcal{D}(A). \end{aligned}$$

Als Schlussfolgerung dieser Abschätzung bekommt man, dass $\{T_\lambda(t)x\}_{\lambda>2\omega}$ eine Cauchy-Folge in $\mathrm{C}([0,a];X)$ für jedes $a>0$ ist und damit die gleichmäßige Konvergenz $T_\lambda(t)x \to u(t;x)$ gegen eine stetige Funktion $u \in \mathrm{C}(\mathbb{R}_+;X)$. Der Satz von Banach-Steinhaus[5] liefert nun die Existenz eines beschränkten Operators $T(t) \in \mathcal{B}(X)$, so dass $T(\cdot)x \in \mathrm{C}(\mathbb{R}_+;X)$ und

$$T(t)x = \lim_{\lambda\to\infty} T_\lambda(t)x, \quad \forall x \in X,$$

wobei die Konvergenz in $\mathrm{C}([0,a];X)$ für alle $a>0$ zu verstehen ist. Aus den Ungleichungen

$$\begin{aligned} |T(t+s)x - T(t)T(s)x| &\le |T(t+s)x - T_\lambda(t+s)x| + |T(t)[T(s)-T_\lambda(s)]x| \\ &\quad + |T_\lambda(s)[T(s)-T_\lambda(s)]x| \\ |T(h)x - x| &\le |T(h)x - T_\lambda(h)x| + |T_\lambda(h)x - x| \end{aligned}$$

erkennt man sofort, dass T ebenfalls eine C_0-Halbgruppe ist und wegen

$$|T(t)| \le \liminf_{\lambda\to\infty} |T_\lambda(t)| \le M \lim_{\lambda\to\infty} e^{\frac{\omega}{1-\omega/\lambda}t} = Me^{\omega t}, \quad \forall t \ge 0,$$

folgt $T \in \mathcal{S}(X,M,\omega)$.

(c) $A_T = -A$. Als letztes zeigen wir, dass der Erzeuger A_T der C_0-Halbgruppe $T(t)$ mit $-A$ übereinstimmt. Dazu schauen wir uns die folgende Identität an

$$\frac{T_\lambda(t)-I}{t}x = -\frac{1}{t}\int_0^t T_\lambda(s)A_\lambda x\,ds, \quad \forall x \in \mathcal{D}(A).$$

Der Grenzübergang $\lambda \to \infty$ ergibt

$$\frac{T(t)-I}{t}x = -\frac{1}{t}\int_0^t T(s)Ax\,ds, \quad \forall x \in \mathcal{D}(A).$$

Berücksichtige dabei, dass $A_\lambda x \to Ax$ für $x \in \mathcal{D}(A)$ gilt und die Konvergenz $T_\lambda \to T$ stark und gleichmäßig ist, d.h. $T_\lambda(t)x \to T(t)x$ in $\mathrm{C}([0,a];X)$ für alle $x \in X$. Der Grenzübergang $t \to +0$ auf der rechten Seite existiert und führt auf $-Ax$, was die Existenz des Grenzwertes auf der linken Seite impliziert, d.h. $x \in D(A_T)$ und $A_T x = -Ax$ für alle $x \in \mathcal{D}(A)$, also $A_T \supset -A$. Die Abgeschlossenheit von A liefert die Identität

$$\frac{T(t)-I}{t}x = -A\frac{1}{t}\int_0^t T(s)x\,ds, \quad t>0, \quad \forall x \in X.$$

Sei nun $x \in \mathcal{D}(A_T)$. Dann existiert der Grenzwert $t \to +0$ für die linke Seite und damit auch für die rechte Seite, die für $t \to +0$ den Wert $-Ax$ ergibt, d.h. $A_T x = -Ax$ für alle $x \in \mathcal{D}(A_T)$. Wir haben also gezeigt $-A = A_T \in \mathcal{G}(X,M,\omega)$. □

[5] Wir haben gezeigt: (1) $\{T_\lambda(t)\}_{\lambda>2\omega} \subset \mathcal{B}(X)$ ist gleichmässig beschränkt. (2) Auf einer dichten Teilmenge von X, nämlich $\mathcal{D}(A)$, ist die Folge $\{T_\lambda(t)x\}_{\lambda>2\omega}$ konvergent in $\mathrm{C}([0,a];X)$ für alle $a>0$.

Obwohl der Satz die Generatoren von C_0-Halbgruppen vollständig charakterisiert, ist dieser nicht so einfach anzuwenden, da alle Potenzen der Resolvente abgeschätzt werden müssen, d.h. vor allem mit einer allgemeinen Konstante $M \geq 1$ (siehe (3.5)). Einen Ausweg bietet der Fall $M = 1$.

Korollar 3.3.1. *Sei $A : \mathcal{D}(A) \subset X \to X$ ein abgeschlossener, linearer, dicht definierter Operator im Banachraum X. Dann sind äquivalent*

(i) $-A \in \mathcal{G}(X, 1, \omega)$.

(ii) $\rho(-A) \supset (\omega, \infty)$ *und es gilt die Abschätzung*

$$|(\lambda + A)^{-1}| \leq \frac{1}{\lambda - \omega}, \quad \forall \lambda > \omega. \tag{3.6}$$

Um dieses Korollar auch für die allgemeine Situation, d.h. $M > 1$, anwenden zu können, ist der folgende Trick von W. Feller nützlich.

Lemma 3.3.1. *Ist $T \in \mathcal{S}(X, M, \omega)$, so existiert eine äquivalente Norm $\|\cdot\|$ auf X, so dass $T \in \mathcal{S}(X_{\|\cdot\|}, 1, \omega)$ gilt.*

Die umgekehrte Richtung gilt trivialerweise.[6]

Proof. Wir definieren die neue Norm $\|x\|_X := \sup_{t\geq 0} |T(t)e^{-\omega t}x|$. Dann gilt

$$|x| \leq \|x\| \leq M|x|, \quad \forall x \in X,$$

also ist $\|\cdot\|$ eine zu $|\cdot|$ äquivalente Norm. Weiterhin gilt

$$\begin{aligned}\|T(t)x\| &= \sup_{s\geq 0} |T(s)e^{-\omega s}T(t)x| = e^{\omega t}\sup_{s\geq 0} |T(t+s)e^{-\omega(t+s)}x| \\ &= e^{\omega t}\sup_{\tau\geq t} |T(\tau)e^{-\omega\tau}x| = e^{\omega t}\|x\|,\end{aligned}$$

d.h. $T \in \mathcal{S}(X_{\|\cdot\|}, 1, \omega)$. □

Dieser Trick erlaubt eine neue Formulierung des Satzes 3.3.1.

Korollar 3.3.2. *Sei $A : \mathcal{D}(A) \subset X \to X$ ein abgeschlossener, linearer, dicht definierter Operator im Banachraum X. Dann sind äquivalent*

(i) $-A \in \mathcal{G}(X, \omega)$.

(ii) $\rho(-A) \supset (\omega, \infty)$ *und es gilt bzgl. einer äquivalenten Norm $\|\cdot\|$ die Abschätzung*

$$\|(\lambda + A)^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda - \omega}, \quad \forall \lambda > \omega. \tag{3.7}$$

[6]Sei $T \in \mathcal{S}(X_{\|\cdot\|}, 1, \omega)$ mit normierten Banachraum $(X, \|\cdot\|)$. Man wähle nun einfach $|\cdot| = M\|\cdot\|$ als neue Norm. Dann gilt $T \in \mathcal{S}(X_{|\cdot|}, M, \omega)$.

3.4. Exponentialformeln

In der Literatur findet man oft die Schreibweise e^{-At} für die von $-A \in \mathcal{G}$ erzeugte Halbgruppe $T(t)$, also

$$T(t) = e^{-At}.$$

Der Beweis zu Theorem 3.3.1 zeigt auch, in welchem Sinne diese Gleichung zu verstehen ist. Die Konvergenz $T_\lambda(t) \to T(t)$ aus dem Beweis von Satz 3.3.1 zeigt

$$T(t)x = \lim_{\lambda\to\infty} e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \lambda^{2n} (\lambda + A)^{-n} x, \quad t > 0, \quad x \in X \tag{3.8}$$

bzw.

$$T(t)x = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n (I + \frac{1}{k} A)^{-n} x, \quad t > 0, \quad x \in X. \tag{3.9}$$

Weitere Formeln sind

$$T(t)x = \lim_{n\to\infty} (I + \frac{t}{n} A)^{-n} x, \quad t > 0, \quad x \in X \tag{3.10}$$

und nur gültig für beschränkte Operatoren A

$$T(t)x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} (-A)^n x = \lim_{n\to\infty} (I - \frac{t}{n} A)^n x. \tag{3.11}$$

Kapitel 4

Dissipative Operatoren

Ziel dieses Abschnitts ist der Satz von Lumer-Philips. Die zentrale Eigenschaft ist die ω-Dissipativität und wir werden sehen, dass $A \in \mathcal{G}(X, 1, \omega)$ diese Eigenschaft besitzt. Dazu benötigen wir

4.1. Die Dualitätsabbildung und Semi-Innenprodukte

Sei X ein Banachraum und X^* sein Dualraum, d.h. $X^* = \mathcal{B}(X, \mathbb{R})$, mit natürlicher Paarung $x^*(x) = \langle x^*, x \rangle_{X^*,X} = \langle x^*, x \rangle$ für $x \in X$, $x^* \in X^*$. Der Satz von Hahn-Banach liefert zu jedem $x \in X$ ein $y_x^* \in X^*$ mit $|y_x^*| = 1$ und $\langle y_x^*, x \rangle = |x|$. Definiert man nun $x^* := y_x^* |x|$, so gilt $\langle x^*, x \rangle = |x|^2 = |x^*|^2$. Man definiert daher

Definition 4.1.1. *Die Abbildung $\mathcal{F} : X \to 2^{X^*}$ definiert durch*

$$\mathcal{F}(x) = \{x^* \in X^* : \langle x^*, x \rangle = |x|^2 = |x^*|^2\}$$

heisst Dualitätsabbildung in X.

Es folgen ein paar Eigenschaften

Proposition 4.1.1. *Sei $\mathcal{F}$ die Dualitätsabbildung im Banachraum X (über $\mathbb{C}$). Dann gilt*

(i) Für alle $x \in X$ ist $\mathcal{F}(x)$ w^*-(Folgen)abgeschlossen und konvex;

(ii) $\mathcal{F}(\lambda x) = \lambda \mathcal{F}(x)$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in X$;

(iii) $\mathcal{F}(\cdot)$ ist stetig von X mit der Normtopologie nach X^* mit der w^*-Topologie.

(iv) Ist X^* strikt konvex[1], dann ist $\mathcal{F}$ einwertig.[2]

[1] Der Banachraum X heißt strikt konvex, falls für alle $x, y \in X$ mit $x \neq y$ und $|x| = |y| = 1$: $|(x+y)/2| < 1$.

[2] Ist $\mathcal{F}$ einwertig, so nennt man X glatt. Weiterhin gilt: Ist X^* glatt, dann ist X strikt konvex. Für reflexive Banachräume X gilt: X^* ist genau dann strikt konvex, wenn X glatt ist.

(v) X ist genau dann ein Hilbertraum, wenn $\mathcal{F}$ einwertig und konjugiert linear ist.

Proof. (i) Konvexität: seien $x^*, y^* \in \mathcal{F}(x)$ und $\lambda \in (0,1)$. Dann gilt für $z^* = \lambda x^* + (1-\lambda)y^*$

$$\langle z^*, x\rangle_{X^*,X} = \lambda|x|^2 + (1-\lambda)|x|^2 = |x|^2,$$

sowie

$$|x|^2 = \langle z^*, x\rangle_{X^*,X} \le |z^*||x| \quad \Rightarrow \quad |x| \le |z^*|.$$

Andererseits gilt $|z^*| \le \lambda|x^*| + (1-\lambda)|y^*| = |x|$, d.h. aber $|x| = |z^*|$.
w^*-Abgeschlossenheit: Sei $(x_n^*)_n \subset \mathcal{F}(x)$ eine gegen $x^* \in X^*$ w^*-konvergente Folge (Netz); dann gilt $|x|^2 = \langle x_n^*, x\rangle_{X^*,X} \to \langle x^*, x\rangle_{X^*,X}$, also $\langle x^*, x\rangle_{X^*,X} = |x|^2$ und damit auch $|x^*| \ge |x|$. Andererseits gilt auch

$$|\langle x^*, y\rangle_{X^*,X}| \leftarrow |\langle x_n^*, y\rangle_{X^*,X}| \le |x_n^*|, \quad \forall y \in X,\ |y| \le 1$$

und mit der Normdefinition von $|x^*|$ folgt die Relation $|x^*| \le \liminf |x_n^*|$. Da nun $x_n^* \in \mathcal{F}(x)$ gilt, haben wir ebenfalls $|x_n^*| = |x|$ und daraus folgt nun $|x| \le |x^*| \le |x|$.
(ii) Für $\lambda = 0$ klar. Für $\lambda \ne 0$ und $x^* \in \mathcal{F}(\lambda \cdot x)$ gilt

$$|x^*|^2 = \lambda^2|x|^2 = \lambda\langle x^*, x\rangle_{X^*,X} \quad \Leftrightarrow \quad |x^*/\lambda|^2 = |x|^2 = \langle x^*/\lambda, x\rangle_{X^*,X}.$$

Folglich gilt $x^*/\lambda \in \mathcal{F}(x)$ bzw. $x^* \in \lambda\mathcal{F}(x)$.
(iii) Kommt noch.
(iv) Angenommen $x^* \ne y^*$ und $x^*, y^* \in \mathcal{F}(x)$. X^* strikt konvex gibt $|(x^*+y^*)/2| < |x|$. Da $\mathcal{F}(x)$ konvex ist, wissen wir $z^* = (x^*+y^*)/2 \in \mathcal{F}(x)$, d.h. insbesondere $|z^*| = |x|$ — ein Widerspruch zur Annahme.
(v) Sei X ein Hilbertraum. Dann ist X strikt konvex (sogar gleichmäßig konvex). Dies sieht man mit Hilfe der Parallelogrammgleichung. Der Riesz'sche Darstellungssatz, d.h. die Riesz-Abbildung $R : X^* \to X$, $x^* \mapsto R(x^*) = x_*$, $\langle x^*, x\rangle = (x|x_*)$ und $|x_*| = |x^*|$, ist bijektiv, isometrisch und konjugiert linear, liefert $\mathcal{F}(x+y) = \mathcal{F}(x) + \mathcal{F}(y)$ und $\mathcal{F}(\lambda x) = \overline{\lambda}\mathcal{F}(x)$.

Sei nun umgekehrt $\mathcal{F} : X \to X^*$ konjugiert linear. Wir rechnen einfach die Parallelogrammgleichung nach, d.h. sei $x, y \in X$ beliebig und $x^* = \mathcal{F}(x)$, $y^* = \mathcal{F}(y)$. Dann liefert die Linearität, dass $x^* \pm y^* = (x \pm y)^* = \mathcal{F}(x \pm y)$ und damit

$$\begin{aligned} |x+y|^2 + |x-y|^2 &= \langle x^*+y^*, x+y\rangle + \langle x^*-y^*, x-y\rangle \\ &= 2(\langle x^*, x\rangle + \langle y^*, y\rangle) + \langle x^*, y\rangle + \langle y^*, x\rangle - (\langle x^*, y\rangle + \langle y^*, x\rangle) \\ &= 2(|x|^2 + |y|^2). \end{aligned}$$

□

Beispiel 4.1.1. Sei $X = \mathrm{L}_p(\Omega;\mathbb{C})$ mit $1 < p < \infty$. Die Dualitätsklammern sind gegeben durch

$$\langle f^*, f\rangle_{X^*,X} = \int_\Omega f(x)f^*(x)\,dx, \quad f \in X, \quad f^* \in X^* = \mathrm{L}_{p^*}(\Omega;\mathbb{C})$$

mit $1/p + 1/p^* = 1$. Wähle nun $f^*(x) = \overline{f(x)}|f(x)|^{p-2}\|f\|_X^{2-p}$. Dann gilt

$$\langle f^*, f\rangle_{X^*,X} = \|f\|_X^2.$$

Weitehin gilt $p^* = p/(p-1)$ und damit

$$\|f^*\|_{X^*} = \left(\int_\Omega |f(x)|^{(p-1)\cdot p^*}\,dx\right)^{(p-1)/p} \|f\|_X^{2-p} = \|f\|_X^{p-1+2-p} = \|f\|_X.$$

Da X strikt konvex ist, folgt die Einwertigkeit von $\mathcal{F}$ und damit

$$\mathcal{F}(f) = \overline{f}|f|^{p-2}\|f\|^{p-2}_{\mathrm{L}_p(\Omega;\mathbb{C})}.$$

Beispiel 4.1.2. Sei $X = \mathrm{C}(\Omega)$ für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ kompakt. Nach dem Riesz'schen Darstellungssatz gilt $X^* = \mathrm{M}(\Omega)$ — der Raum der signierten Borelmaße, d.h. für alle $f^* \in \mathrm{C}(\Omega)^*$ gibt es genau ein signiertes Borelmaß μ mit

$$\langle f^*, f\rangle = \int_\Omega f(x)\,d\mu(x) \quad \text{und} \quad |f^*| = |\mu|,$$

wobei die Totalvariation $|\mu|$ definiert ist durch

$$|\mu| = |\mu^+| + |\mu^-| = \int_\Omega 1\,d\mu^+ + \int_\Omega 1\,d\mu^-.$$

Hierbei ist $\mu = \mu^+ - \mu^-$ die Jordan-Zerlegung von μ, d.h. μ^+, μ^- sind endliche positive Borelmaße für die $\mu^+(A) = \mu(A \cap \Omega^+)$ und $\mu^-(A) = \mu(A \cap \Omega^-)$ gilt, wobei (Ω_+, Ω_-) eine beliebige Hahn-Zerlegung von Ω ist. Es gilt nun

$$\mathcal{F}(f) = \{\mu \in \mathrm{M}(\Omega) : \mu\mathrm{sgn}(f) \geq 0,\ |\mu| = |f|_\infty,\ \operatorname{supp}\mu \subset \Omega_f\},$$

wobei $\Omega_f := \{x \in \Omega : |f(x)| = |f|_\infty\}$ und

$$\mu\mathrm{sgn}(f) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mu_\pm(\{x \in \Omega : \mp f(x) > 0\}) = 0.$$

Um die die Behauptung zu zeigen sei $f \in \mathrm{C}(\Omega)$ fixiert. Zerlege weiterhin f nach dessen Vorzeichen, d.h. $f = f^+ - f^-$ mit $f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$ und $f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}$. Die Jordan-Zerlegung für $\mu = \mu^+ - \mu^- \in \mathcal{F}(f)$ ergibt nun

$$\langle f^*, f\rangle = \int_\Omega [f^+(x) - f^-(x)]\,d(\mu^+(x) - \mu^-(x))$$

$$\begin{aligned}&= \int_{\operatorname{supp}\mu} f^+(x)\,d\mu^+(x) + \int_{\operatorname{supp}\mu} f^-(x)\,d\mu^-(x)\\&\quad - \int_{\operatorname{supp}\mu} f^+(x)\,d\mu^-(x) - \int_{\operatorname{supp}\mu} f^-(x)\,d\mu^+(x)\\&= |f|_\infty(|\mu^+| + |\mu^-|),\end{aligned}$$

wobei das letzte Gleichheitszeichen wegen $\mu \in \mathcal{F}(f)$ gilt. Da $\langle f^*, f\rangle \le |\mu||f|_\infty$ und die letzten beiden Integrale nicht-positiv sind, muss $\int_{\operatorname{supp}\mu} f^+\,d\mu^- = \int_{\operatorname{supp}\mu} f^-\,d\mu^+ = 0$ gelten, d.h. aber $\operatorname{sgn}(f)\mu \ge 0$. Damit erhalten wir

$$\int_{\operatorname{supp}\mu} f^+(x)\,d\mu^+(x) + \int_{\operatorname{supp}\mu} f^-(x)\,d\mu^-(x) = |f|_\infty(|\mu^+| + |\mu^-|).$$

Die Gleichheit ist jedoch nur dann möglich, falls $\operatorname{supp}\mu \subset \Omega_f$. Beachte, dass es stets Dirac-Maße in $\mathcal{F}(f)$ gibt, also

$$\{\mu = |f|_\infty \operatorname{sgn}(f)\,\delta_{x_0} : x_0 \in \Omega_f\} \subset \mathcal{F}(f)\,.$$

Beispiel 4.1.3. $X = \mathrm{L}_1(\Omega)$ mit kompaktem $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Übungsaufgabe.

In Banachräumen kann man zum Teil die Innenprodukte der Hilberträume nachahmen. Allerdings erhält man nicht alle Eigenschaften.

Definition 4.1.2. *Die Semiinnenprodukte $(\cdot,\cdot)_\pm : X \times X \to \mathbb{R}$ sind definiert durch*

$$(x,y)_+ = \lim_{t\to+0} \frac{|y+tx| - |y|}{t}|y|$$

und

$$(x,y)_- = \lim_{t\to+0} \frac{|y| - |y-tx|}{t}|y|,$$

d.h. $(\cdot,\cdot)_\pm$ sind die rechts- bzw. linksseitige Gateaux-Ableitung der Norm in y in Richtung x multipliziert mit $|y|$.

Man sieht sofort, dass im Falle eines Hilbertraumes $X = H$ gilt

$$(x,y)_+ = \mathfrak{Re}(x|y)_H = (x,y)_-,$$

da die Norm dort Frechet-diffbar ist. Genauer,

$$|z+h|_H = |z|_H + \frac{\mathfrak{Re}(z|h)_H}{|z|} + o(|h|), \quad z,h \in H.$$

Weiterhin existieren diese Grenzwerte. Denn
(i) Die Abbildung

$$f_+ : (0,\infty) \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto f_+(t;x,y) := \frac{1}{t}(|y+tx| - |y|)$$

ist monoton wachsend und die Abbildung

$$f_- : (0,\infty) \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto f_-(t;x,y) := \frac{1}{t}(|y| - |y-tx|)$$

monoton fallend; z.B. für $s<t$

$$\begin{aligned}|y+sx| - |y| &= |\tfrac{s}{t}(y+tx) + (1-\tfrac{s}{t})y| - |y| \le \tfrac{s}{t}|y+tx| + (1-\tfrac{s}{t})|y| - |y| \\ &= \tfrac{s}{t}(|y+tx| - |y|).\end{aligned}$$

(ii) Ausserdem gilt $f_-(t;x,y) = -f_+(t;-x,y)$ und $f_+(t;-x,-y) = f_+(t;x,y)$ und für $y^* \in \mathcal{F}(y)$

$$\begin{aligned}|y||y+tx| - |y|^2 = |y||y+tx| - \langle y^*, y\rangle &= |y| \sup_{|z^*|\le 1} |\langle z^*, y+tx\rangle| - \langle y^*, y\rangle \\ &\underset{z^*=y^*/|y|}{\ge} |\langle y^*, y+tx\rangle| - \langle y^*, y\rangle \ge \mathfrak{Re}\langle y^*, y+tx\rangle - \langle y^*, y\rangle \\ &= t\mathfrak{Re}\langle y^*, x\rangle .\end{aligned}$$

Damit erhält man

$$f_-(t;x,y) = -f_+(t;-x,y) \le -\mathfrak{Re}\langle y^*, -x\rangle = \mathfrak{Re}\langle y^*, x\rangle \le f_+(t;x,y). \tag{4.1}$$

Die Monotonie und die Beschränktheit (4.1) liefern die Existenz der Grenzwerte und

$$(x,y)_- \le \mathfrak{Re}\langle y^*, x\rangle \le (x,y)_+. \tag{4.2}$$

Proposition 4.1.2. *Seien $(\cdot,\cdot)_\pm$ wie in Definition 4.1.2 und $\mathcal{F}$ die Dualitätsabbildung. Dann gilt*

(i) $(x,y)_- = -(-x,y)_+$, $(x,y)_+ = (-x,-y)_+$, $|(x,y)_\pm| \le |x||y|$ *und*

$$(x,y)_- \le \mathfrak{Re}\langle y^*, x\rangle \le (x,y)_+, \quad \forall y^* \in \mathcal{F}(y);$$

(ii)

$$(x,z)_- + (y,z)_\pm \le (x+y,z)_\pm \le (x,z)_+ + (y,z)_\pm;$$

(iii)

$$\begin{aligned}(x+\alpha y, y)_\pm &= (x,y)_\pm + \alpha|y|^2, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \\ (\alpha x, \beta y)_\pm &= \alpha\beta(x,y)_\pm, \quad \forall \alpha,\beta \in \mathbb{R},\ \alpha\cdot\beta \ge 0, \\ (\alpha x, \beta y)_\pm &= \alpha\beta(x,y)_\mp, \quad \forall \alpha,\beta \in \mathbb{R},\ \alpha\cdot\beta \le 0;\end{aligned}$$

(iv) $(\cdot,\cdot)_\pm$ *sind Lipschitz-stetig bzgl. des ersten Argumentes;*

(v)

$$(x,y)_+ = \max\{\mathfrak{Re}\langle y^*, x\rangle \,:\, y^* \in \mathcal{F}(y)\},$$
$$(x,y)_- = \min\{\mathfrak{Re}\langle y^*, x\rangle \,:\, y^* \in \mathcal{F}(y)\};$$

(vi) *Ist X^* strikt konvex, so gilt $(\cdot,\cdot)_- = (\cdot,\cdot)_+$. Insbesondere ist dann $(\cdot,\cdot)_\pm$ linear bzgl. des ersten Arguments;*

(vii) *Ist X ein Hilbertraum, so gilt $(\cdot,\cdot)_- = (\cdot,\cdot)_+ = \mathfrak{Re}(\cdot|\cdot)$;*

(viii) *$(\cdot,\cdot)_+$ ist oberhalbstetig und $(\cdot,\cdot)_-$ unterhalbstetig.*[3]

Proof. Da $(x,y)_- = -(-x,y)_+$ gilt, reicht es meißtens aus die Behauptungen für $(\cdot,\cdot)_+$ zu zeigen.

(i) Folgt direkt aus der Definition bzw. obige Rechnung.

(ii) Beachtet man die Ungleichung

$$\frac{|z+t(x+y)|-|z|}{t} = \frac{|2z+2t(x+y)|-2|z|}{2t} \leq \frac{|z+2tx|-|z|}{2t} + \frac{|z+2ty|-|z|}{2t},$$

so erhält man $(x+y,z)_+ \leq (x,z)_+ + (y,z)_+$, sowie

$$(x+y,z)_- = -(-(x+y),z)_+ \geq -[(-x,z)_+ + (-y,z)_+] = (x,z)_- + (y,z)_-.$$

Damit bleibt noch $(x+y,z)_- \leq (x,z)_+ + (y,z)_-$ und $(x,z)_- + (y,z)_+ \leq (x+y,z)_-$ zu zeigen, wobei letzteres schon aus der ersten Beziehung unter Benutzung von $(x,y)_- = -(-x,y)_+$ folgt. Um die erste Beziehung zu zeigen, betrachtet man einfach

$$\begin{aligned}\frac{|z|-|z-t(x+y)|}{t} &= \frac{|z|-|2z-ty-(z+tx)|}{t}\\ &\leq \frac{|z|-|2z-ty|+|z+tx|}{t}\\ &\leq \frac{|z|-|z-yt/2|}{t/2} + \frac{|z+tx|-|z|}{t}.\end{aligned}$$

(iii) Einfaches nachrechnen mit der Definition.
(iv) Dies folgt aus *(ii)*, denn

$$(x+y,z)_+ - (y,z)_+ \leq (y,z)_+ \leq |y||z|, \quad (y,z)_+ - (x+y,z)_+ \leq (-y,z)_+ \leq |y||z|.$$

(v) Wir wollen zeigen, dass $\mathfrak{Re}\langle y^*, x\rangle_{X^*,X} = (x,y)_+$ für ein $y^* \in \mathcal{F}(y)$, da dann wegen *(ii)* die Aussage folgt. Beachte wieder, dass sich $(x,y)_- = \min\{\mathfrak{Re}\langle y^*, x\rangle_{X^*,X} : y^* \in \mathcal{F}(y)\}$ aus

$$(x,y)_- = -(-x,y)_+ = -\max\{\mathfrak{Re}\langle y^*, -x\rangle_{X^*,X} : y^* \in \mathcal{F}(y)\}$$

[3] D.h. für $(x_n,y_n) \in X \times X$ mit $(x_n,y_n) \to (x,y) \in X \times X$ gilt: $\limsup (x_n,y_n)_+ \leq (x,y)_+$ bzw. $\liminf (x_n,y_n)_- \geq (x,y)_-$.

$$\begin{aligned} &= -\max\{-\mathfrak{Re}\langle y^*, x\rangle_{X^*,X} : y^* \in \mathcal{F}(y)\} \\ &= \min\{\mathfrak{Re}\langle y^*, x\rangle_{X^*,X} : y^* \in \mathcal{F}(y)\} \end{aligned}$$

ergibt.

Nun zum Beweis. Sei $y \in X$ fixiert. Zunächst betrachten wir den Banachraum X über $\mathbb{R}$. Definiere $\phi : X \to \mathbb{R}$ durch durch $\phi(z) := (z, y)_+$. Dann ist ϕ aufgrund der Eigenschaften *(ii)* und *(iii)* ein sublineares Funktional (reell), also

$$\phi(x_1 + x_2) \leq \phi(x_1) + \phi(x_2), \quad \phi(rx) = r\phi(x), \quad \forall x_1, x_2, x \in X, \quad \forall r \geq 0$$

und beschränkt wegen *(i)*, also

$$|\phi(z)| \leq |z||y|, \quad \forall z \in X \quad \Rightarrow \quad |\phi| \leq |y|.$$

Fixiere $x \in X$ ebenfalls. Definiere als nächtes das Funktional

$$\begin{gathered} f_0 : M_x := \{m \in X : m = \alpha x, \alpha \in \mathbb{R}\} \subset X \to \mathbb{R}, \\ \alpha x \mapsto f_0(\alpha x) := \alpha\phi(x). \end{gathered}$$

Dann ist f_0 ein lineares und beschränktes Funktional auf dem Unterraum M_x. Die Linearität folgt direkt aus *(iii)* und die Beschränktheit wieder aus (i); es gilt $|f_0| \leq |y|$. Der Satz von Hahn-Banach liefert eine Fortsetzung $f : X \to \mathbb{R}$ von f_0 mit $f(\alpha x) = f_0(\alpha x) = \alpha\phi(x)$, für alle $\alpha \in \mathbb{R}$, und $f(z) \leq \phi(z)$ für alle $z \in X$. Wir bestimmen nun die Norm von f. Es gilt

$$f(z) \leq \phi(z) \leq |z||y|, \quad -f(z) = f(-z) \leq \phi(-z) \leq |z||y|, \quad \forall z \in X,$$

d.h. aber $|f(z)| \leq |z||y|$, also $|f| \leq |y|$. Weiterhin haben wir

$$f(y) \leq \phi(y) = |y|^2 \quad \text{und} \quad f(y) = -f(-y) \geq -\phi(-y) = |y|^2,$$

also $f(y) = \phi(y) = |y|^2$ sowie $|f| \geq |y|$ und damit $|f| = |y|$. Daher gilt

$$f(x) = (x, y)_+ \quad \text{mit} \quad f \in \mathcal{F}(y).$$

Sei nun X ein Banachraum über $\mathbb{C}$. Betrachte wie oben $f_0 : M_x \to \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Dann gilt für die Fortsetzung $f : X \to \mathbb{C}$:

$$f_{|M_x} = f_0, \quad \mathfrak{Re} f(z) \leq \phi(z), \quad \forall z \in X.$$

Setze nun $g : X \to \mathbb{R}$, $g(z) := \mathfrak{Re} f(z)$ und

$$h : X \to \mathbb{C}, \quad h(z) := g(z) - ig(iz).$$

Dann ist h komplex linear und für $m = \alpha x \in M_x$, $\alpha \in \mathbb{R}$, gilt

$$\mathfrak{Re}\, h(m) = g(m) = \mathfrak{Re} f(m) = f_0(\alpha x) = \alpha(x, y)_+.$$

Weiterhin liefert

$$\mathfrak{Re} f(\pm y) \leq \phi(\pm iy) = |y|^2 \cdot 0 \quad \Rightarrow \quad -\mathfrak{Re} f(\pm iy) = \mathfrak{Re} f(\mp iy) \leq 0,$$

dass $\mathfrak{Re} f(\pm iy) = g(\pm iy) = 0$ gilt. Damit erhalten wir

$$h(y) = g(y) - ig(iy) = g(y) = |y|^2 \quad \Rightarrow \quad |h| \geq |y|,$$

da $g(y) = \mathfrak{Re} f(y) \leq \phi(y) = |y|^2$ und $-g(y) = -\mathfrak{Re} f(y) \leq \phi(-y) = |y|^2$. Betrachte nun $|h(z)|^2$,

$$\begin{aligned} |h(z)|^2 &= g(z)^2 + g(iz)^2 = g(g(z)z) + g(g(iz)iz) \\ &= g(z[g(z) + ig(iz)]) \leq \phi(z[g(z) + ig(iz)]) \leq |z||g(z) + ig(iz)||y| \\ &= |h(z)||z||y|, \end{aligned}$$

also $|h(z)| \leq |z||y|$ bzw. $|h| \leq |y|$. Mit den obigen Ergebnissen erhalten wir insgesamt wieder

$$h(x) = (x, y)_+ \quad \text{mit} \quad h \in \mathcal{F}(y).$$

(vi) Für strikt konvexes X^* ist die Menge $\mathcal{F}(x)$ für jedes $x \in X$ einwertig, d.h. $\mathcal{F} : X \to X^*$. Aufgrund von *(v)* wissen wir, dass

$$(x, y)_- = \min\{\mathfrak{Re}\langle y^*, x\rangle : y^* \in \mathcal{F}(y)\} = \max\{\mathfrak{Re}\langle y^*, x\rangle : y^* \in \mathcal{F}(y)\} = (x, y)_+,$$

also $(x, y)_- = (x, y)_+ = \mathfrak{Re}\langle y^*, x\rangle$ mit $y^* = \mathcal{F}(y)$. Die Linearität folgt nun aus $y^* \in X^*$.
(vii) Da für Hilberträume $\mathcal{F}$ einwertig ist, gilt nach (v) sowohl $(x, y)_+ = \mathfrak{Re}\langle y^*, x\rangle$ als auch $(x, y)_- = \mathfrak{Re}\langle y^*, x\rangle$ mit $y^* = \mathcal{F}(y)$. Der Riesz'sche Darstellungssatz liefert die Aussage.
(viii) Sei dazu $(x_n, y_n) \to (x, y)$ in $X \times X$. Dann gilt wegen der Monotonie von f_+ (siehe Seite 35) und der Normkonvergenz

$$(x_n, y_n)_+ \leq \frac{|x_n + ty_n| - |y_n|}{t} \to \frac{|x + ty| - |y|}{t}, \quad \forall t > 0.$$

Folglich $\limsup(x_n, y_n)_+ \leq \frac{|x+ty|-|y|}{t}$ für alle $t > 0$ und der Grenzwertübergang $t \to +0$ liefert die Aussage. Benutzt man $(x, y)_- = -(-x, y)_+$ und obige Beziehung, so bekommt man die Unterhalbstetigkeit von $(\cdot, \cdot)_-$. □

Beispiel 4.1.4. Sei $X = \mathrm{L}_p(\Omega; \mathbb{C})$ und $1 < p < \infty$. Dann ist X strikt konvex und somit gilt

$$(f, g)_\pm = \|g\|^{2-p}_{\mathrm{L}_p(\Omega;\mathbb{C})} \mathfrak{Re} \int_\Omega f(x)\overline{g(x)}|g(x)|^{p-2}\, dx.$$

4.2. Das Lumer-Phillips Theorem

Sei $T \in \mathcal{S}(X, 1, \omega)$ mit Erzeuger $-A$. Für $x \in \mathcal{D}(A)$ erhält man

$$\begin{aligned}(\tfrac{1}{t}(T(t)x - x), x)_+ &= \tfrac{1}{t}((T(t)x, x)_+ - |x|^2) \\ &\leq \frac{1}{t}(|T(t)| - 1)|x|^2 \leq \tfrac{1}{t}(e^{\omega t} - 1)|x|^2 \to_{t\to+0} \omega|x|^2.\end{aligned}$$

Folglich gilt

$$(-Ax, x)_+ \leq \omega|x|^2, \quad \forall x \in \mathcal{D}(A).$$

Operatoren mit dieser Eigenschaft heißen stark ω-dissipativ. Daher definieren wir

Definition 4.2.1. *Sei $A : \mathcal{D}(A) \subset X \to X$ ein linearer Operator im Banachraum X.*

(i) A heißt ω-dissipativ, falls gilt

$$(Ax, x)_- \leq \omega|x|^2, \quad \forall x \in \mathcal{D}(A). \tag{4.3}$$

(ii) A heißt stark ω-dissipativ, falls gilt

$$(Ax, x)_+ \leq \omega|x|^2, \quad \forall x \in \mathcal{D}(A). \tag{4.4}$$

Später werden wir sehen, dass diese Eigenschaft recht leicht nachzuprüfen ist. Bevor wir zum Herzstück dieses Abschnitts kommen, nämlich das Lumer-Phillips-Theorem, zeigen wir folgende Charakterisierung der ω-Dissipativität und einige Folgerungen.

Lemma 4.2.1. *Sei $A : \mathcal{D}(A) \subset X \to X$ ein linearer Operator im Banachraum X. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) A ist ω-dissipativ;

(ii) Es gilt

$$|(\lambda - A)x| \geq (\lambda - \omega)|x|, \quad \forall x \in \mathcal{D}(A), \quad \forall \lambda > \omega. \tag{4.5}$$

Proof. *(i) $\Rightarrow$ (ii)*:

$$\begin{aligned}|(\lambda - A)x||x| \underset{\text{Prop. 4.1.2}}{\geq} ((\lambda - A)x, x)_+ \underset{\text{Prop. 4.1.2}}{=} \lambda|x|^2 + (-Ax, x)_+ \\ = \lambda|x|^2 - (Ax, x)_- \geq (\lambda - \omega)|x|^2\end{aligned}$$

und folglich *(ii)*.
(ii) $\Rightarrow$ (i): Sei o.B.d.A. $\omega = 0$ aufgrund von Betrachtung $A_\omega = A - \omega$. Sei $x \in \mathcal{D}(A)$ und setze $y = x/|x|$. Dann gilt für alle $y^*_\lambda \in \mathcal{F}((\lambda - A)y)$

$$\lambda \leq |(\lambda - A)y| = \frac{|(\lambda - A)y|^2}{|y^*_\lambda|} = \langle z^*_\lambda, (\lambda - A)y\rangle,$$

wobei $z_\lambda^* = \frac{y_\lambda^*}{|y_\lambda^*|}$. Daraus gewinnt man nun

$$\begin{aligned}\lambda &\le \langle z_\lambda^*, (\lambda - A)y\rangle = \lambda \mathfrak{Re}\langle z_\lambda^*, y\rangle - \mathfrak{Re}\langle z_\lambda^*, Ay\rangle \\ &\le \min\{\lambda - \mathfrak{Re}\langle z_\lambda^*, Ay\rangle, \lambda \mathfrak{Re}\langle z_\lambda^*, y\rangle + |Ay|\}.\end{aligned} \tag{4.6}$$

Da $\langle z_\lambda^*, (\lambda - A)y\rangle \in \mathbb{R}$, wissen wir ebenfalls

$$\lambda \mathfrak{Im}\langle z_\lambda^*, y\rangle = \mathfrak{Im}\langle z_\lambda^*, Ay\rangle \quad \Rightarrow \quad |\mathfrak{Im}\langle z_\lambda^*, y\rangle| \le \frac{1}{\lambda}|Ay|. \tag{4.7}$$

Aus (2.5) folgt nun

$$\mathfrak{Re}\langle z_\lambda^*, Ay\rangle \le 0, \quad 1 - \frac{1}{\lambda}|Ax| \le \mathfrak{Re}\langle z_\lambda^*, y\rangle. \tag{4.8}$$

Da $|z_\lambda^*| = 1$ gilt, gibt es einen schwach*-Häufungspunkt $z^* \in X^*$ der Folge $\{z_\lambda^*\}_{\lambda>0}$ (Die Einheitskugel in X^* ist schwach*-kompakt.), d.h. $z_{\lambda'} \rightharpoonup^*_{\lambda'\to\infty} z^*$. Für z^* gilt nun $|z^*| \le \liminf_{\lambda'\to\infty} |z_\lambda^*| \le 1$ und wegen (4.8) die Ungleichungen

$$\mathfrak{Re}\langle z^*, Ay\rangle \le 0, \quad 1 \le \mathfrak{Re}\langle z^*, y\rangle.$$

Daraus bekommt man nun

$$1 \le \mathfrak{Re}\langle z^*, y\rangle \le |z^*||y| = |z^*| \le 1,$$

and da $\mathfrak{Im}\langle z^*, y\rangle = 0$ gilt (siehe (2.7)) schliesslich

$$1 = |y| = |z^*| = \langle z^*, y\rangle \quad \Leftrightarrow \quad |x|^2 = |x_0^*|^2 = \langle x_0^*, x\rangle$$

mit $x_0^* = z^*|x|$, d.h. aber $x_0^* \in \mathcal{F}(x)$. Insgesamt haben wir gezeigt

$$(Ax, x)_- \underset{\text{Prop. 4.1.2}}{=} \min_{x^*\in\mathcal{F}(x)} \mathfrak{Re}\langle x^*, Ax\rangle \le \mathfrak{Re}\langle x_0^*, Ax\rangle \le 0.$$

□

Proposition 4.2.1. *Sei $A : \mathcal{D}(A) \subset X \to X$ ein linearer Operator im Banachraum X. Ist A ω-dissipativ, dann*

(1) $\lambda - A$ ist injektiv für alle $\lambda > \omega$ und

$$|(\lambda - A)^{-1}y| \le \frac{1}{\lambda - \omega}|y|, \quad \forall y \in \mathcal{R}(\lambda - A);$$

(2) $\lambda_0 - A$ ist surjektiv für ein $\lambda_0 > \omega$ genau dann, wenn $\lambda - A$ surjektiv für alle $\lambda > \omega$ ist; in diesem Fall hat man $(\omega, \infty) \subset \rho(A)$;

(3) A ist abgeschlossen genau dann, wenn das Bild $\mathcal{R}(\lambda - A)$ abgeschlossen ist für ein $\lambda > \omega$ (und somit für alle $\lambda > \omega$);

(4) Falls $\mathcal{R}(A) \subset \overline{\mathcal{D}(A)}$, z.B. für dicht definierten Operator A, dann ist A abschliessbar. Sein Abschluss $\overline{A}$ ist wieder ω-dissipativ and genügt $\mathcal{R}\left(\lambda - \overline{A}\right) = \overline{\mathcal{R}(\lambda - A)}$ für alle $\lambda > \omega$.

Proof. Im folgenden können wir wieder $\omega = 0$ annehmen.

Zu (1): Dies ist einfach eine Reformulierung von *(ii)* aus Lemma 4.2.1.

Zu (2): Sei $\lambda_0 > 0$, so dass $\lambda_0 - A$ surjektiv ist. Zusammen mit (1) wissen wir, dass $\lambda_0 \in \rho(A)$ und $|(\lambda_0 - A)^{-1}| \leq 1/\lambda_0$. Die Neumann-Reihe zeigt $(0, 2\lambda_0) \subset \rho(A)$, denn

$$\begin{aligned}(\lambda - A)^{-1} &= (\lambda_0 - A)^{-1}(I + (\lambda - \lambda_0)(\lambda_0 - A)^{-1})^{-1} \\ &= (\lambda_0 - A)^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^k (\lambda_0 - A)^{-k}\end{aligned}$$

und damit

$$|(\lambda - A)^{-1}| \leq \frac{1}{\lambda_0} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{|\lambda - \lambda_0|}{\lambda_0} \right)^k = \frac{1}{\lambda_0 - |\lambda - \lambda_0|},$$

für $|\lambda - \lambda_0| < \lambda_0$ bzw. $\lambda \in (0, 2\lambda_0)$. Dieses Vorgehen kann beliebig fortgesetzt werden, so dass man $(0, \infty) \subset \rho(A)$ erhält.
Zu (3): Der Operator A ist abgeschlossen genau dann, wenn $\lambda - A$ abgeschlossen für ein (und somit für alle) $\lambda > 0$. Da A dissipativ ist, gilt (4.5).

Sei A abgeschlossen und $(\lambda - A)x_n = y_n \in \mathcal{R}(\lambda - A)$ konvergent in X, also $y_n \to y$. Dann ist wegen (4.5) auch $x_n \in \mathcal{D}(A) \subset X$ eine Cauchy-Folge im Banachraum X und daher $x_n \to x$. Die Abgeschlossenheit von $\lambda - A$ ergibt nun $y = (\lambda - A)x$ und $x \in \mathcal{D}(A)$, d.h. aber $\mathcal{R}(\lambda - A)$ ist abgeschlossen.

Im umgekehrten Fall ist $\mathcal{R}(\lambda - A)$ abgeschlossen. Sei nun $(\lambda - A)x_n \to y$ und $x_n \to x$. Dann ist aber schon $y \in \mathcal{R}(\lambda - A)$, d.h. $y = (\lambda - A)\hat{x}$ mit einem $\hat{x} \in \mathcal{D}(A)$. Wegen (4.5) gilt aber $\hat{x} = x$, also ist $\lambda - A$ abgeschlossen.

Zu (4): Die Eigenschaft $\overline{A}$ ist ω-dissipativ folgt aus der Unterhalbstetigkeit von $(\cdot, \cdot)_-$. Denn sei $x \in \mathcal{D}\left(\overline{A}\right)$, dann gibt es eine Folge $(x_n)_n \subset \mathcal{D}(A)$ mit $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ und $\overline{A}x = \lim_{n\to\infty} Ax_n$. Da A ω-dissipativ ist und $(\cdot, \cdot)_-$ unterhalbstetig, gilt nun

$$(x_n, Ax_n)_- \leq \omega |x_n|^2 \quad \Rightarrow \quad (x, \overline{A}x)_- \leq \liminf_{n\to\infty} (x_n, Ax_n)_- \leq \omega |x|^2.$$

Für den Beweis der Abschliessbarkeit von A haben wir zu zeigen, dass

$$\mathcal{D}(A) \ni x_n \to 0, \quad Ax_n \to y \quad \Rightarrow \quad y = 0.$$

Angenommen $y \neq 0$. Da $\mathcal{R}(A) \subset \overline{\mathcal{D}(A)}$, damit auch $\overline{\mathcal{R}(A)} \subset \overline{\mathcal{D}(A)}$, und $y \in \overline{\mathcal{R}(A)}$, finden wir zu y ein $w \in \mathcal{D}(A)$, dass beliebig nahe bei $-y$ ist und darum

$(y, w)_+ < 0$ (beachte $(y, -y)_+ = -|y|^2$). Die ω-Dissipativität von A gibt $\alpha := (y, w)_+^{-1}[(Aw, w)_- - \omega|w|^2 - 1] > 0$. Nun gilt

$$\begin{aligned}(Aw, w - \alpha x_n)_- &= (A[w - \alpha x_n] + \alpha A x_n, w - \alpha x_n)_- \\ &\underset{\text{Prop. 4.1.2}}{\leq} (A[w - \alpha x_n], w - \alpha x_n)_- + (\alpha A x_n, w - \alpha x_n)_+ \\ &= (A[w - \alpha x_n], w - \alpha x_n)_- + \alpha(A x_n, w - \alpha x_n)_+ \\ &\leq \omega|w - \alpha x_n|^2 + \alpha(A x_n, w - \alpha x_n)_+.\end{aligned}$$

Die Unterhalbstetigkeit von $(\cdot, \cdot)_-$ und die Oberhalbstetigkeit von $(\cdot, \cdot)_+$ ergibt für $n \to \infty$

$$\begin{aligned}(Aw, w)_- &\leq \liminf_{n\to\infty} (Aw, w - \alpha x_n)_- \\ &\leq \liminf_{n\to\infty} \left[\omega|w - \alpha x_n|^2 + \alpha(A x_n, w - \alpha x_n)_+\right] \\ &\leq \omega|w|^2 + \alpha \limsup_{n\to\infty} (A x_n, w - \alpha x_n)_+ \\ &\leq \omega|w|^2 + \alpha(y, w)_+ = (Aw, w)_- - 1,\end{aligned}$$

was einen Widerspruch bedeutet. $\square$

Theorem 4.2.1. *Sei $A : \mathcal{D}(A) \subset X \to X$ ein linearer, abgeschlossener, dicht definierter Operator im Banachraum X. Dann sind folgende Aussagen äquivalent*

(i) $-A \in \mathcal{G}(X, 1, \omega)$.

(ii) $-A$ *ist ω-dissipativ und* $\mathcal{R}(\lambda_0 + A) = X$ *für ein* $\lambda_0 > \omega$.

Proof. *(i)* $\Rightarrow$ *(ii)*: Die Notwendigkeit der ersten Bedingung haben wir ganz zu Beginn des Abschnitts gesehen. Die zweite Bedingung ist im Theorem 3.3.1 enthalten.
(ii) $\Rightarrow$ *(i)*: Nach Proposition 4.2.1 wissen wir, dass die Operatoren $(\lambda + A)$ injektiv für $\lambda > \omega$ sind und da $\mathcal{R}(\lambda_0 + A) = X$ für ein $\lambda_0 > \omega$, sind die Operatoren $(\lambda + A)$ auch surjektiv für alle $\lambda > \omega$, also bijektiv. Weiterhin liefert die Dissipativität wieder nach Proposition 4.2.1 die Resolventenabschätzung

$$|(\lambda + A)^{-1}| \leq \frac{1}{\lambda - \omega}, \quad \forall \lambda > \omega.$$

Damit ist nach Theorem 3.3.1 $-A \in \mathcal{G}(X, 1, \omega)$. $\square$

Die Eigenschaft (4) der Proposition 4.2.1 liefert eine etwas andere Version des Lumer-Phillips-Theorem, die in den Anwendungen meistens verwendet wird.

Korollar 4.2.1. *Sei $A_0 : D(A_0) \subset X \to X$ ein linearer, dicht definierter Operator im Banachraum X mit den folgenden Eigenschaften*

(i) $-A_0$ *ist ω-dissipativ;*

(ii) $\mathcal{R}(\lambda_0 + A_0)$ *ist dicht in* X *für ein* $\lambda_0 > \omega$.

Dann gilt $-A := -\overline{A_0} \in \mathcal{G}(X, 1, \omega)$, *wobei* $\overline{A_0}$ *den Abschluß von* A_0 *bezeichnet.*

Als letztes zeigen wir noch ein weitere Charakterisierung der Eigenschaft $-A \in \mathcal{G}(X, 1, \omega)$, die nützlich ist, wenn man den dualen Operator A^* zu A kennt.

Theorem 4.2.2. *Sei* $A : \mathcal{D}(A) \subset X \to X$ *linear, abgeschlossen, dicht definiert und* A^* *der zu* A *duale Operator. Dann gilt:* $-A \in \mathcal{G}(X, 1, \omega)$ *genau dann, wenn* A *und* A^* ω*-dissipativ sind.*

Proof. „⇒“: Sei $-A \in \mathcal{G}(X, 1, \omega)$, dann ist $-A$ ω-dissipativ und $\lambda + A$ für ein $\lambda > \omega$ invertierbar. Nach dem Satz vom abgeschlossenem Bild ist $\lambda + A^*$ ebenfalls invertierbar sowie

$$(\lambda + A^*)^{-1} = \left((\lambda + A)^{-1}\right)^*$$

und

$$|(\lambda + A^*)^{-1}| = |(\lambda + A)^{-1}| \leq \frac{1}{\lambda - \omega}.$$

Folglich ist

$$|(\lambda + A^*)x^*| \geq (\lambda - \omega)|x^*|, \quad \forall x^* \in D(A^*),$$

d.h. $-A^*$ ist ebenfalls ω-dissipativ (siehe Proposition 4.2.1).

„⇐“: Mit Theorem 4.2.1 müssen wir nur noch zeigen, dass $\mathcal{R}(\lambda_0 + A) = X$ für ein $\lambda_0 > \omega$. Nach Proposition 4.2.1 wissen wir jedoch schon, dass $\mathcal{R}(\lambda + A)$ für alle $\lambda > \omega$ abgeschlossen ist. Daher nehmen wir an, dass $\mathcal{R}(\lambda + A) \neq X$. Somit existiert ein $0 \neq x^* \in X^*$ mit $\langle x^*, y\rangle = 0$ für alle $y \in \mathcal{R}(\lambda + A)$ bzw.

$$\lambda\langle x^*, x\rangle + \langle x^*, Ax\rangle = 0, \quad \forall x \in \mathcal{D}(A),$$

folglich $x^* \in \mathcal{D}(A^*)$ und $(\lambda + A^*)x^* = 0$, da $\mathcal{D}(A)$ dicht in X ist. Die ω-Dissipativität von $-A^*$ besagt nun nach Proposition, dass $(\lambda + A^*)$ injektiv ist für alle $\lambda > \omega$, also $x^* = 0$ — ein Widerspruch. □

4.3. Dissipativität des Laplace-Operators

Einer der wichtigsten Operatoren der math. Physik ist der Laplace-Operator $\Delta = \sum_j \partial_{x_j}^2$. Wir betrachten diesen Operator in verschiedenen Funktionenräumen und rechnen dessen Dissipativität nach.

(i) $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ist ein beliebiges Gebiet, insbesondere $\Omega = \mathbb{R}^n$, und $X = \mathrm{L}_p(\Omega)$ mit $1 \leq p < \infty$. Definiere

$$(A_1 u)(x) = -\Delta u(x), \quad x \in \Omega, \quad A_1 : \mathcal{D}(A_1) = \mathrm{C}_0^\infty(\Omega) \subset X \to X.$$

(ii) Diesmal sei $X = \mathrm{C}_0(\Omega) = \{u \in \mathrm{C}(\Omega) : u = 0 \text{ auf } \partial\Omega\}$.

(iii) Betrachte wie in (i) den Raum $X = \mathrm{L}_p(\Omega)$ mit $1 \leq p < \infty$ und allgemeinere Randbedingungen, d.h.

$$\begin{aligned}(A_3 u)(x) &= -\Delta u(x), \quad x \in \Omega, \\ \mathcal{D}(A_3) &= \{u\mathrm{C}^2(\overline{\Omega}) : \ \alpha(x)\partial_\nu u(x) + \beta(x)u(x) = 0\},\end{aligned}$$

wobei $\alpha(x)^2 + \beta(x)^2 = 1$, $\alpha, \beta \in \mathrm{L}_\infty(\partial\Omega)$ und aus physikalischen Gründen $\alpha(x) \cdot \beta(x) \geq 0$ für f.a. $x \in \partial\Omega$. Desweiteren benötigt man, dass $\partial\Omega$ eine C^1-Mannigfaltigkeit ist.

4.3.1. Der Laplace-Operator auf $\mathbb{R}^n$

Wir wollen zeigen, dass der Laplace-Operator in allen L_p-Räumen und in C_0 dichtes Bild besitzt. Wir wissen bereits schon, dass der Laplace-Operator dissipativ ist.

Dazu werden wir die Fourier-Transformation und den Schwartz-Raum $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ benutzen. Da offenbar $\mathrm{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset X$ mit $X \in \{\mathrm{L}_p(\mathbb{R}^n), \mathrm{C}_0(\mathbb{R}^n)\}$, $p \in [1, \infty)$, liegt $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dicht in X. Wir setzen

$$(A_0 u)(x) = -\Delta u(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \mathcal{D}(A_0) = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \tag{4.9}$$

wobei A_0 dissipativ in obigen Räumen ist. Zeige nun $\overline{\mathcal{R}(\lambda + A_0)} = X$. Die Fourier-Transformation $F : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, definiert durch

$$(Fu)(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} u(x) e^{-ix\xi} \, dx,$$

ist ein Isomorphismus mit Inversem

$$(F^{-1}v)(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} v(\xi) e^{ix\xi} \, d\xi.$$

Sei nun $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ eine Lösung von

$$\lambda u - \Delta u = f, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{4.10}$$

für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$; Fourier-Transformation und Linearität ergeben

$$(\lambda + |\xi|^2)(Fu)(\xi) = (Ff)(\xi) \quad \Rightarrow \quad (Fu)(\xi) = \frac{1}{\lambda + |\xi|^2}(Ff)(\xi).$$

Ist nun $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ beliebig, dann ist $Ff \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, folglich auch $\frac{1}{\lambda+|\xi|^2}(Ff)(\xi) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ für $\lambda \in \mathbb{C}\backslash(-\infty, 0]$. Diese Funktion ist aufgrund der Surjektivität der Fourier-Transformation Transformierte einer Funktion $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$; dieses u ist Lösung der Gleichung (4.10), d.h. $\mathcal{R}\,(\lambda + A_0)$ ist dicht in allen L_p-Räumen, $1 \leq p < \infty$, und in C_0. Daher liefert das Korollar 4.2.1 die Korrektheit von

$$\begin{aligned} \partial_t u - \Delta u &= f, \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R}^n, \\ u(0) &= u_0, \quad x \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

in den betrachteten Räumen.

Korollar 4.3.1. *Sei $X = \mathrm{L}_p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$, oder $X = \mathrm{C}_0(\Omega)$. Dann gilt für den durch (4.9) definierten Operator A_0:*

(i) $-A = -\overline{A_0} \in \mathcal{G}(X, 1, 0)$.

(ii) Das Cauchy-Problem für $-A$ ist korrekt gestellt.

Kapitel 5

Konservative Operatoren

In diesem Paragraphen beschäftigen wir uns mit C_0-Gruppen und deren Erzeuger. Wichtige Spezialfälle sind die C_0-Gruppen von Isometrien, deren Erzeuger konservative Operatoren sind, und die unitären C_0-Gruppen, deren Erzeuger i mal selbstaadjungierter Operator sind. (Satz von Stone)

5.1. Duale Halbgruppen

Sei $T \in \mathcal{S}(X, M, \omega)$. Dann ist der adjungierte Operator T^* zu T ebenfalls eine Halbgruppe beschränkter Operatoren auf X^*, d.h. $T^*(t+s) = T^*(t)T^*(s)$ für $s, t \geq 0$ und $|T^*(t)| \leq Me^{\omega t}$, denn für $s, t \geq 0$

$$\begin{aligned}\langle T^*(t+s)x^*, x\rangle &= \langle x^*, T(t+s)x\rangle = \langle x^*, T(s)T(t)x\rangle \\ &= \langle T^*(s)x^*, T(t)x\rangle = \langle T^*(t)T^*(s)x^*, x\rangle, \quad \forall x \in X, x^* \in X^*\end{aligned}$$

sowie

$$\langle T^*(t)x^*, x\rangle = \langle x^*, T(t)x\rangle \leq |x^*||T(t)x| \leq |x^*||x|Me^{\omega t}, \quad \forall x \in X, x^* \in X^*.$$

Letztere Ungleichung impliziert

$$|T^*(t)x^*|_{X^*} = \sup_{x\in X, |x|\leq 1} |\langle T^*(t)x^*, x\rangle| \leq |x^*|Me^{\omega t} \quad \Rightarrow \quad |T^*(t)| \leq Me^{\omega t},\ t \geq 0.$$

Man würde vermuten, dass T^* ebenfalls C_0 ist und A^* ihr Erzeuger. Leider ist dies nicht immer richtig.

Beispiel 5.1.1. Sei T die C_0-Halbgruppe der Translationen auf $X = \mathrm{L}_1(\mathbb{R})$, also $T(t)f(x) = f(t+x)$. Aufgrund der Beziehung

$$\langle f^*, T(t)f\rangle = \int_{\mathbb{R}} f^*(x)f(t+x)\,dx = \int_{\Omega} f^*(x-t)f(x)\,dx$$

ist T^* die C_0-Halbgruppe der Links-Translation. Diese ist aber nicht C_0 in $X^* = \mathrm{L}_\infty(\mathbb{R})$, da $|f^*(\cdot - t) - f^*(\cdot)|_\infty \to 0$ für $t \to 0$ bereits $f^* \in \mathrm{BUC}(\mathbb{R})$ impliziert.

Der Grund für diesen Defekt ist, dass nicht unbedingt $\mathcal{D}(A^*)$ dicht in X^* gelten muss.[1] Wir definieren daher den Teilraum $X^\circ \subset X^*$ durch

$$X^\circ = \{x^* \in X^* : T^*(t)x^* \to x^* \text{ für } t \to +0\} \tag{5.1}$$

und

$$T^\circ(t) = T^*(t)_{|X^\circ}, \quad t \geq 0,$$

was nun eine C_0-Halbgruppe auf X° ist, also $T^\circ \in \mathcal{S}(X^\circ, M, \omega)$. Weiterhin ist X° ein abgeschlossener Teilraum von X^*. Sei dazu $x_n^* \in X^\circ$ mit $x_n^* \to x^*$ in X^*. Dann findet man aufgrund der Ungleichung

$$|T^*(t)x^* - x^*| \leq |T^*(t)[x_n^* - x^*]| + |x_n^* - x^*| + |T^*(t)x_n^* - x_n^*|$$

und wegen $|T^*(t)| \leq Me^{\omega t}$, dass $x^* \in X^\circ$ gilt. Als nächstes zeigen wir, dass X° hinreichend groß ist, d.h. $\mathcal{D}(A^*) \subset X^\circ$. Sei $x^* \in \mathcal{D}(A^*)$, dann gilt (benutze Proposition 2.2.2) für alle $x \in X$

$$\begin{aligned}|\langle T^*(t)x^* - x^*, x\rangle| = |\langle x^*, T(t)x - x\rangle| = |\langle x^*, A\int_0^t T(s)x\,ds\rangle| \\ |\langle A^*x^*, \int_0^t T(s)x\,ds\rangle| \leq \frac{M}{\omega}[e^{\omega t} - 1]|x||A^*x^*| \to 0, \quad t \to +0.\end{aligned}$$

Damit bekommen wir

$$|T^*(t)x^* - x^*| = \sup_{|x|\leq 1} |\langle T^*(t)x^* - x^*, x\rangle| \leq \frac{M}{\omega}[e^{\omega t} - 1]|A^*x^*|$$

und somit die Konvergenz $|T^*(t)x^* - x^*| \to 0$ für $t \to +0$ und $x^* \in \mathcal{D}(A^*)$, d.h. $x^* \in X^\circ$.

Sei A° der Erzeuger von T°, dann ist $\mathcal{D}(A^\circ) = \{x^* \in X^\circ : \lim_{h\to+0} \frac{1}{h}[T^\circ(h) - I]x^* \text{ existiert in } X^\circ\}$ dicht in X° aufgrund von Proposition 2.2.2. Wir betrachten nun für $x \in \mathcal{D}(A)$, $x^* \in \mathcal{D}(A^\circ)$

$$\begin{aligned}\langle A^\circ x^*, x\rangle &= \lim_{t\to+0} \langle \frac{1}{t}[T^\circ(t) - I]x^*, x\rangle = \lim_{t\to+0} \langle \frac{1}{t}[T^*(t) - I]x^*, x\rangle \\ &= \lim_{t\to+0} \langle x^*, \frac{1}{t}[T(t) - I]x\rangle = \langle x^*, Ax\rangle.\end{aligned}$$

Folglich ist $x^* \in \mathcal{D}(A^*)$ und $A^\circ x^* = A^*x^*$ für alle $x^* \in \mathcal{D}(A^\circ)$, d.h.

$$A^\circ \subset A^* \quad \Leftrightarrow \quad A^\circ = A^*_{|\mathcal{D}(A^\circ)} \text{ und } \mathcal{D}(A^\circ) \subset \mathcal{D}(A^*).$$

[1] Sind X, Y reflexive Banachräume und $A : \mathcal{D}(A) \subset X \to Y$ dicht definiert und abschliessbar, so ist A^* ebenfalls dicht definiert und abschliessbar und $A^{**} = A$ (nach geeigneter Identifikation).

Beachte, dass $A^*x^* \in X^\circ$ immer gilt, so dass wir die Inklusion

$$\mathcal{D}(A^\circ) \subset \mathcal{D}\left(A^*_{|X^\circ}\right) := \{x^* \in \mathcal{D}(A^*) : \; A^*x^* \in X^\circ\}$$

haben. Wegen $X^\circ = \overline{\mathcal{D}(A^\circ)}$ und $\mathcal{D}(A^\circ) \subset \mathcal{D}(A^*)$ folgt bereits $X^\circ \subset \overline{\mathcal{D}(A^*)}$. Wir zeigen noch die umgekehrte Inklusion. Zunächst gilt $|[T(h) - I](\lambda - A)^{-1}| \to 0$ für $h \to +0$ aufgrund der Identität

$$\begin{aligned} [T(h) - I](\lambda - A)^{-1} &= [T(h) - I] \int_0^\infty e^{-\lambda s} T(s)\, ds \\ &= [e^{\lambda h} - 1](\lambda - A)^{-1} - e^{\lambda h} \int_0^h e^{-\lambda t} T(t)\, dt \end{aligned}$$

und daher auch

$$\begin{aligned} [T^*(h) - I](\lambda - A^*)^{-1} &= [T(h) - I]^* \big((\lambda - A)^{-1}\big)^* \\ &= \big((\lambda - A)^{-1}[T(h) - I]\big)^* \to 0, \quad h \to +0, \end{aligned}$$

d.h. $T^*(h)x^* \to x^*$ für $h \to +0$ und alle $x^* \in \mathcal{D}(A^*)$, da $(\lambda - A^*)^{-1}y^* \in \mathcal{D}(A^*)$ für alle $y^* \in X^*$. Dann erhalten wir diese Konvergenz auch für alle $x^* \in \overline{\mathcal{D}(A^*)}$ und damit $\overline{\mathcal{D}(A^*)} \subset X^\circ$. Als letztes bestimmen wir $\mathcal{D}(A^\circ)$, genauer, wir wollen $A^\circ = A^*_{|X^\circ}$ zeigen. Die Inklusion $A^\circ \subset A^*_{|X^\circ}$ haben wir oben schon gezeigt. Sei umgekehrt $x^* \in \mathcal{D}(A^*) \subset X^\circ$ mit $A^*x^* \in X^\circ$. Aus

$$\begin{aligned} \langle T^\circ(t)x^* - x^*, x\rangle &= \langle x^*, T(t)x - x\rangle = \langle x^*, A\int_0^t T(s)x\, ds\rangle \\ &= \langle \int_0^t T^*(s)A^*x^*\, ds, x\rangle = \langle \int_0^t T^\circ(s)A^*x^*\, ds, x\rangle, \quad \forall x \in X, \end{aligned}$$

folgt

$$\frac{1}{t}\big(T^\circ(t)x^* - x^*\big) = \frac{1}{t}\int_0^t T^\circ(s)A^*x^*\, ds.$$

Die Normstetigkeit von $T^\circ(\cdot)A^*x^*$ liefert als Grenzwert auf der rechten Seite A^*x^* und damit die Existenz des Grenzwertes auf der linken Seite und daher

$$\lim_{t\to+0} \frac{1}{t}\big(T^\circ(t)x^* - x^*\big) = A^*x^*, \quad \forall x^* \in \mathcal{D}\left(A^*_{|X^\circ}\right).$$

Wir fassen zusammen.

Theorem 5.1.1. *Sei $T \in \mathcal{S}(X, M, \omega)$ mit Erzeuger A. Dann ist die duale Halbgruppe T^* stark stetig auf $X^\circ = \overline{\mathcal{D}(A^*)}$ und ihr Erzeuger A° ist die Einschränkung von A^* auf X°, d.h. $\mathcal{D}(A^\circ) = \mathcal{D}\left(A^*_{|X^\circ}\right) = \{x^* \in \mathcal{D}(A^*) : A^*x^* \in X^\circ\}$ und $A^\circ x^* = A^*x^*$ für $x^* \in \mathcal{D}(A^\circ)$. Ist X reflexiv, so gilt $X^\circ = X^*$*

Die letzte Behauptung folgt aus der Tatsache, dass für abgeschlossene Operatoren $A : \mathcal{D}(A) \subset X \to X$ mit dichtem Definitionsbereich der duale Operator A^* ebenfalls dicht definiert ist, wenn X reflexiv ist.

Beachte, dass im obigen Beispiel gerade $X^\circ = \mathrm{BUC}(\mathbb{R})$ ist, also genau der Abschluss von d/dx in $\mathrm{L}_\infty(\mathbb{R})$.

5.2. C^0-Gruppen

Es ist klar, was C_0-Gruppen sind.

Definition 5.2.1. *Eine Familie $\{T(t)\}_{t\in\mathbb{R}} \subset \mathcal{B}(X)$ heißt C_0-Gruppe in X, falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind*

(G) $T(t)T(s) = T(t+s)$ *für alle* $s, t \in \mathbb{R}$;

(C_0) $\lim_{h\to 0} T(h)x = x$ *für alle* $x \in X$.

Die Gruppeneigenschaft ergibt insbesondere $T(t)T(-t) = T(0) = I$, folglich sind alle $T(t)$ invertierbar und es gilt $T(t)^{-1} = T(-t)$. Wir definieren wieder die Wachstumsabzissen von $T(t)$ wie folgt

$$\begin{aligned} \omega_0^+ &= \lim_{t\to\infty} t^{-1}\log(|T(t)|), \\ \omega_0^- &= \lim_{t\to\infty} t^{-1}\log(|T(-t)|). \end{aligned}$$

Es ist dann klar, dass zu jedem $\omega > \omega_0^+$ ein $M_\omega \geq 1$ existiert mit $|T(t)| \leq M_\omega e^{\omega t}$ für $t > 0$, und zu jedem $\omega > \omega_0^-$ ein $M_\omega \geq 1$ mit $|T(t)| \leq M_\omega e^{-\omega t}$ für $t < 0$. Setzt man noch $\omega_0 = \max\{\omega_0^+, \omega_0^-\}$, so gilt die Abschätzung

$$|T(t)| \leq M_\omega e^{\omega|t|}, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

falls $\omega > \omega_0$ ist.

Zu jeder C_0-Gruppe gehören die zwei C_0-Halbgruppen $T^\pm(t)$ definiert durch

$$T^+(t) = T(t), \quad T^-(t) = T(-t), \quad t > 0.$$

Sei nun A der Erzeuger von T^+ und B der Erzeuger von T^-; wir zeigen $B = -A$. Ist nämlich $x \in \mathcal{D}(B)$, dann gilt

$$\lim_{t\to+0} \frac{T^+(t) - I}{t} x = \lim_{t\to+0} T(t)\frac{I - T(-t)}{t} x == \lim_{t\to+0} \frac{I - T^-(t)}{t} x = -Bx,$$

also $\mathcal{D}(B) \subset \mathcal{D}(A)$ und $A = -B$ auf $\mathcal{D}(B)$; ebenso geht diese Argumentation umgekehrt.

Nun erzeuge A die C_0-Halbgruppe T^+ und $-A$ die C_0-Halbgruppe T^-; wir zeigen, dass dann

$$T(t) = \begin{cases} T^+(t) & t > 0 \\ T^-(t) & t < 0 \end{cases}$$

eine C_0-Gruppe bildet. Sei dazu $x \in \mathcal{D}(A)$; dann ist

$$\frac{d}{dt} T^+(t)T^-(t)x = T^+(t)AT^-(t)x + T^+(t)[-A]T^-(t)x = 0,$$

also $T^+(t)T^-(t)x = x$ für alle $t > 0$, d.h. aber $T(t)T(-t) = T(-t)T(t) = I$, und daher $T^{-1}(t) = T(-t)$. Die Gruppeneigenschaft folgt nun so: Für $t, s > 0$ und $t, s < 0$ ist dies sofort klar. Für $t > 0 > s$ und $t + s > 0$ gilt

$$T(t)T(s) = T(t + s - s)T(s) = T(t + s)T(-s)T(s) = T(t + s)$$

sowie für $t > 0 > s$ und $t + s < 0$

$$T(t)T(s) = T(t)T(-t + t + s) = T(t)T(-t)T(t + s) = T(t + s).$$

Wir fassen zusammen.

Theorem 5.2.1. *Sei $A : \mathcal{D}(A) \subset X \to X$ ein linearer, abgeschlossener und dicht definierter Operator im Banachraum X. Dann sind äquivalent*

- *A erzeugt eine C_0-Gruppe T, d.h. $Ax = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(T(h)x - x)$ mit $\mathcal{D}(A) = \{x \in X : \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(T(h)x - x)$ existiert in $X\}$;*
- *$-A,\ A \in \mathcal{G}(X)$.*

Kombiniert man Theorem 5.2.1 mit Hille-Yosida oder Lumer-Phillips, so erhält man eine Reihe von Charakterisierungen von C_0-Gruppen.

Korollar 5.2.1. *Sei $A : \mathcal{D}(A) \subset X \to X$ ein linearer, abgeschlossener und dicht definierter Operator im Banachraum X. Dann sind äquivalent*

(i) A erzeugt eine C_0-Gruppe T mit

$$|T(t)| \leq e^{\omega_+ t}, \quad t > 0, \quad |T(t)| \leq e^{-\omega_- t}, \quad t < 0.$$

(ii) Es gilt

$$-\omega_-|x|^2 \leq (Ax, x)_+, \quad (Ax, x)_- \leq \omega_+|x|^2, \quad \forall x \in \mathcal{D}(A)$$

und es gibt ein $\lambda > \max\{\omega_-, \omega_+\}$ mit $\mathcal{R}(\lambda \pm A) = X$.

Korollar 5.2.2. *Sei $A_0 : \mathcal{D}(A_0) \subset X \to X$ ein linearer, dicht definierter Operator im Banachraum X mit folgenden Eigenschaften:*

(i) *A_0 ist ω_+-dissipativ und $-A_0$ ist ω_--dissipativ, d.h. es gibt Konstanten $\omega_\pm \in \mathbb{R}$, so dass*

$$-\omega_-|x|^2 \leq (A_0x, x)_+, \quad (A_0x, x)_- \leq \omega_+|x|^2, \quad \forall x \in \mathcal{D}(A_0)\,;$$

(ii) *$\mathcal{R}(\lambda \pm A_0)$ ist dicht in X für ein $\lambda > \max\{\omega_-, \omega_+\}$.*

Dann erzeugt $A := \overline{A_0}$ eine C_0-Gruppe, wobei A den Abschluß von A_0 bezeichnet.

5.3. Konservative Operatoren

Ein wichtiger Spezialfall ist der, wenn $|T(t)| \leq 1$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt; dann ist sogar $|T(t)x| = |x|$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und alle $x \in X$, denn

$$|x| = |T(t)T(-t)x| \leq |T(-t)x| \leq |x|,$$

d.h. T ist eine C_0-Gruppe von Isometrien. Nach Korollar 5.2.1 sind ihre Erzeuger Operatoren A mit $(Ax, x)_\pm = 0$.

Definition 5.3.1. *Sei $A : \mathcal{D}(A) \subset X \to X$ ein linearer Operator. A heißt konservativ, falls $(Ax, x)_\pm = 0$ für alle $x \in \mathcal{D}(A)$ gilt.*

Als Konsequenz von Korollar 5.2.1 erhalten wir die folgende einfache Charakterisierung der Erzeuger von Gruppen von Isometrien.

Korollar 5.3.1. *Sei $A : \mathcal{D}(A) \subset X \to X$ ein linearer, abgeschlossener und dicht definierter Operator im Banachraum X. Dann sind äquivalent:*

(i) *A erzeugt eine C_0-Gruppe T von Isometrien in X;*

(ii) *A ist konservativ und für ein $\lambda > 0$ sind $(\lambda \pm A)$ surjektiv.*

Sei nun X ein Hilbertraum und T eine C_0-Gruppe unitärer Operatoren, d.h. es gelte $T^{-1}(t) = T^*(t)$ für $t \in \mathbb{R}$. Damit ist T^* ebenfalls eine C_0-Gruppe und es gilt $T^*(t) = T(-t)$; der Erzeuger von T sei A, nach Theorem 5.1.1 ist der Erzeuger von T^* genau A^*. Andererseits ist der Erzeuger von $T(-t)$ aber $-A$, d.h. die Relation $T^*(t) = T(-t)$ ergibt die Beziehung $A^* = -A$. Solche Operatoren heißen schiefadjungiert. Setzt man $B = -iA$, dann ist $A = iB$ und $B^* = (-iA)^* = iA^* = -iA = B$, d.h. B ist selbstadjungiert. Wir haben den Satz von Stone bewiesen.

Theorem 5.3.1. *Sei $A : \mathcal{D}(A) \subset X \to X$ ein linearer, abgeschlossener und dicht definierter Operator im (komplexen) Hilbertraum X. Dann sind äquivalent:*

(i) *A erzeugt eine C_0-Gruppe unitärer Operatoren in X;*

(ii) *$A = iB$ mit einem selbstadjungierten Operator B.*

BEISPIEL: Wellengleichung, Schrödingergleichung

Kapitel 6

Regularität von C_0-Halbgruppen

In diesem Abschnitt geht es um die holomorphe Fortsetzbarkeit der Halbgruppe $T(\cdot)$ auf eine Teilmenge von $\mathbb{C}$ zum einen, und zum anderen um zusätzliche Regularität der Lösung von (2.1). Wir werden sehen, dass die Regularität der Halbgruppe über das Spektrum des Erzeugers und entsprechende Resolventenabschätzungen (entlang von Parallelen zur imaginären Aches) charakterisiert werden kann. Die folgenden Bilder sollen dies verdeutlichen. (Werden noch eingefügt.)

- C_0-Gruppen: $|(i\tau + \omega + A)^{-1}| \not\to 0$
- gleichmäßig stetige C_0-Halbgruppen: $|(i\tau + \omega + A)^{-1}| \to 0$ für $\tau \to \pm\infty$
- differenzierbare C_0-Halbgruppen: $\log(|\tau|)|(i\tau + \omega + A)^{-1}| \leq C$
- parabolische C_0-Halbgruppen: $\log(|\tau|)|(i\tau + \omega + A)^{-1}| \to 0$ für $|\tau| \to \infty$
- analytische C_0-Halbgruppen: $|\tau|^{-1}|(i\tau + \omega + A)^{-1}| \to 0$ für $|\tau| \to \infty$

Der letzte Fall (für unbeschränkte Operatoren) ist die bestmöglichste Situation. Wir erinnern an folgende Begriffe:

- Sei $T \in \mathcal{S}(X)$, dann heißt

  $$\omega_0(A) = \inf\{\omega \in \mathbb{R} : \exists M_\omega \geq 1,\ \text{so dass } |T(t)| \leq M_\omega e^{\omega t},\ \forall t \geq 0\}$$

  Wachstumsabzisse, wobei $A \in \mathcal{G}(X)$ der Erzeuger der C_0-Halbgruppe T ist. Die C_0-Halbgruppe T heißt beschränkt, falls $T \in \mathcal{S}(X, M, 0)$, und Kontraktion, falls $T \in \mathcal{S}(X, 1, 0)$.

- Zu einem linearen Operator A definieren wir die Spektralschranke

  $$s(A) := \sup\{\mathfrak{Re}\lambda : \lambda \in \sigma(A)\}.$$

Es gilt nun für $A \in \mathcal{G}(X)$ mit C_0-Halbgruppe T

$$-\infty \leq s(A) \leq \omega_0 < \infty,$$

was direkt aus der Resolventendarstellung $(\lambda - A)^{-1} = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)\, dt$ folgt. Beachte, dass aufgrund von Proposition 2.2.1 stets $\omega_0 < \infty$. Andererseits kann $\omega_0 = -\infty$ vorkommen, sowie das Infimum braucht nicht angenommen werden. Man betrachtet einfach

$$T_A(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt in der Zeilensummennorm $|T_A(t)| = 1 + t$ und damit $|T_A(t)| \to \infty$ für $t \to \infty$ sowie für alle $\omega > 0$ existiert ein $M_\omega \geq 1$ (wähle einfach ein $M \geq 1/\omega$) mit

$$1 + t \leq M_\omega e^{\omega t}, \quad \forall t \geq 0,$$

d.h. $\omega_0 = 0$.

6.1. Gleichmäßige Stetigkeit und Kompaktheit

Sei $T \in \mathcal{S}(X, M, \omega)$. Ist T in einem $t_0 > 0$ $\mathcal{B}(X)$-stetig von rechts, dann ist T $\mathcal{B}(X)$-stetig für alle $t \geq t_0$, wie die Abschätzungen

$$|T(t+h) - T(t)| \leq |T(t - t_0)||T(t_0 + h) - T(t_0)|$$

und

$$|T(t-h) - T(t)| \leq |T(t - h - t_0)||T(t_0) - T(t_0 + h)|$$

zeigen. Wir definieren daher

Definition 6.1.1. *$T \in \mathcal{S}(X)$ heißt gleichmäßig stetig, falls es ein $t_0 \geq 0$ gibt, so dass $t \mapsto T(t)$ Norm-stetig auf (t_0, ∞) ist, d.h. $|T(t+h) - T(t)| \to 0$ für $h \to 0$ und alle $t > t_0$. Die Zahl*

$$a_s = \inf\{t_0 \geq 0 : \ |T(t_0 + h) - T(t_0)| \to 0 \, \text{für} \, h \to 0\}$$

heißt Abzisse der gleichmäßigen Stetigkeit für T, das Intervall $J_s = (a_s, \infty)$ Intervall der gleichmäßigen Stetigkeit für T.

Beachten Sie, dass für beschränkte Operatoren stets $a_s = 0$ gilt; es ist aber auch $a_s = 0$ für unbeschränkte Operatoren möglich. Dies werden wir später noch sehen.

Ist T eine C_0-Gruppe, so gilt im Falle A unbeschränkt stets $a_s = \infty$; denn ist T rechts-stetig in $t_0 \geq 0$, so folgt

$$|T(h) - I| = |T(-t_0)||T(t_0 + h) - T(t_0)| \to 0,$$

also muss A beschränkt sein. Bis heute ist keine vollständige Charakterisierung der gleichm. stetigen C_0-Halbgruppen bekannt, sondern es gibt nur notwendige oder hinreichende Bedingungen. Eine Ausnahme bildet der Hilbertraumfall.

Theorem 6.1.1. *Sei $A \in \mathcal{G}(X)$ der Erzeuger einer gleichmäßig stetigen C_0-Halbgruppe $(T(t))_{t\geq 0}$. Dann ist für jedes $b \in \mathbb{R}$ die Menge*

$$\{\lambda \in \sigma(A) : \mathfrak{Re}\lambda \geq b\} \subset \mathbb{C}$$

beschränkt und es gilt

$$\lim_{\tau \to \pm\infty} |(a + i\tau - A)^{-1}| = 0, \quad \forall a > \omega_0.$$

Ohne Beweis.

Definition 6.1.2. *$T \in \mathcal{S}(X)$ heißt kompakt, falls es ein $t_0 > 0$ gibt, so dass $T(t_0) \in \mathcal{B}(X)$ ein kompakter Operator ist. Die Zahl*

$$a_c = \inf\{t_0 > 0 : \ T(t_0) \textit{ ist kompakt.}\}$$

heißt Abzisse der Kompaktheit von T und das Intervall $J_c = (a_c, \infty)$ Kompaktheitsintervall.

Diese Definition ist wieder sinnvoll aufgrund der Halbgruppeneigenschaft. Kompaktheit ist i.a. eine sehr nützlich Eigenschaft von C_0-Halbgruppen. Es gilt folgende Charakterisierung.

Proposition 6.1.1. *$T \in \mathcal{S}(X)$ ist genau dann kompakt für alle $t > 0$, also $J_c = (0, \infty)$, wenn $J_s = (0, \infty)$, also $T(t)$ für $t > 0$ gleichmäßig stetig ist und $(\lambda_0 - A)^{-1}$ für ein $\lambda_0 \in \rho(A)$ kompakt ist.*

Proof. $\Rightarrow$: Sei $T \in \mathcal{S}(X, M, \omega)$ kompakt für $t > 0$. Aufgrund der Kompaktheit der Operatoren $(K_\delta)_{\delta > 0} \subset \mathcal{B}(X)$ definiert durch

$$K_\delta := \int_\delta^\infty T(t)e^{-\lambda t}\, dt, \quad \mathfrak{Re}\lambda > \omega,$$

und der Konvergenz

$$|(\lambda - A)^{-1} - K_\delta| \leq |\int_0^\delta e^{-\lambda t} T(t)\, dt| \leq \frac{M}{\mathfrak{Re}\lambda - \omega}(1 - e^{-\delta(\mathfrak{Re}\lambda - \omega)}) \to 0, \quad \delta \to 0,$$

ist die Resolvente der gleichmäßige Limes von kompakten Operatoren. T ist auch gleichmäßig stetig, da folgendes Resultat gilt.

Lemma 6.1.1. *Sei $T \in \mathcal{S}(X)$. Ist T kompakt für $t > t_0$, dann ist T gleichmäßig stetig für $t > t_0$.*

Beweis in den Übungen.

$\Leftarrow$: Sei $T \in \mathcal{S}(X, M, \omega)$. Die Resolventengleichung

$$(\lambda - A)^{-1} = (\lambda_0 - A)^{-1} - (\lambda - \lambda_0)(\lambda - A)^{-1}(\lambda_0 - A)^{-1}, \quad \lambda \in \rho(A)$$

zeigt zunächst, dass A kompakte Resolvente für alle $\lambda \in \rho(A)$ hat, falls dies nur für ein $\lambda_0 \in \rho(A)$ zutrifft. Daher sind die Operatoren $T_\lambda(t) := T(t)\lambda(\lambda - A)^{-1}$ für $\lambda > \omega$ kompakt und die Identität

$$\begin{aligned} T_\lambda(t) - T(t) &= \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda s} T(t+s)\, ds - \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda s} T(t)\, ds \\ &= \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda s}[T(t+s) - T(t)]\, ds = \lambda(\int_0^\delta \cdots\, ds + \int_\delta^\infty \cdots\, ds) \end{aligned}$$

ergibt die Abschätzung

$$\begin{aligned} |T_\lambda(t) - T(t)| &\leq \sup_{0 \leq s \leq \delta} |T(t+s) - T(t)| + |\lambda| \int_\delta^\infty e^{-\lambda s} M[e^{\omega(t+s)} + e^{\omega t}]\, ds \\ &= \sup_{0 \leq s \leq \delta} |T(t+s) - T(t)| + |\lambda| M e^{\omega t} \int_\delta^\infty e^{-\lambda s}[e^{\omega s} + 1]\, ds \\ &\leq \sup_{0 \leq s \leq \delta} |T(t+s) - T(t)| + 2|\lambda|(\lambda - \omega)^{-1} M e^{\omega(t+\delta)} e^{-\lambda\delta}. \end{aligned}$$

Aufgrund der geichmäßigen Stetigkeit von $T(t)$ für $t > 0$ ist der erste Term beliebig klein, falls $\delta > 0$ geeignet gewählt wird. Der zweite Term wird ebenfalls beliebig klein für $\lambda \to \infty$. Daraus folgt nun $T_\lambda(t) \to T(t)$ in $\mathcal{B}(X)$, sowie $T(t)$ ergibt sich als der Limes von kompakten Operatoren in der Operator-Topologie. □

6.2. Differenzierbarkeit

Definition 6.2.1. *$T \in \mathcal{S}(X)$ mit Erzeuger A heißt differenzierbar, falls $\mathcal{R}(T(t_0)) \subset \mathcal{D}(A)$ für ein $t_0 > 0$ gilt. Die Zahl*

$$a_d := \inf\{t_0 > 0 : \mathcal{R}(T(t_0)) \subset \mathcal{D}(A)\}$$

heißt Differenzierbarkeitsabzisse von T, das Intervall $J_d = (a_d, \infty)$ Differenzierbarkeitsintervall. Ist $a_d = 0$, so heißt T (abstrakt) parabolisch.

Ist $T(t_0)X \subset \mathcal{D}(A)$ für ein $t_0 > 0$, so auch

$$T(t)X = T(t - t_0)T(t_0)X \subset \mathcal{D}(A), \quad \forall t > t_0,$$

da $T(t)\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(A)$ gilt (Nach Proposition 2.2.2 läßt T den Definitionsbereich $\mathcal{D}(A)$ des zugehörigen Erzeugers A invariant.); die Definition ist daher sinnvoll. Die

Funktion $u(t;x) = T(t)x$ ist somit für jedes $x \in X$ auf J_d stetig differenzierbar, also dort eine Lösung der Gleichung

$$\frac{d}{dt}u(t) = Au(t), \quad t > a_d,$$

d.h. $T(\cdot)x \in \mathrm{C}^1((a_d,\infty);X)$. Insbesondere ist $AT(t)$ gleichmäßig beschränkt auf kompakten Teilintervallen von J_d[1]. Darüberhinaus ist T auf J_d gleichmäßig stetig, denn seien $a_d < t_1 \leq t_2 \leq t_1 + 1$ und $|T(t)| \leq M_1$ für $t \in [0,1]$, dann

$$T(t_2)x - T(t_1)x = \int_{t_1}^{t_2} AT(s)x\,ds = \int_{t_1}^{t_2} T(s-t_1)AT(t_1)x\,ds, \quad \forall x \in X$$

und darum

$$|T(t_2) - T(t_1)| \leq (t_2 - t_1)M_1|AT(t_1)|.$$

Es gilt jedoch noch mehr. Die Identität

$$(AT(t/n))^n = A^n T(t) = \frac{d^n}{dt^n}T(t)$$

zeigt, dass T für $t > n \cdot a_d$ sogar n-mal differenzierbar und $n-1$-mal stetig differenzierbar in $\mathcal{B}(X)$ ist, sowie $\mathcal{R}(T(t)) \subset \mathcal{D}(A^n)$ gilt. Im Grenzfall $a_d = 0$ folgt sogar $T \in \mathrm{C}^\infty((0,\infty);\mathcal{B}(X))$ und $\mathcal{R}(T(t)) \subset \mathcal{D}_\infty(A) := \bigcap_{n\geq 1}\mathcal{D}(A^n)$ für alle $t > 0$. Wir fassen zusammen.

Proposition 6.2.1. *Sei $T \in \mathcal{S}(X)$ differenzierbar. Dann gilt*

(i) $\mathcal{R}(T(t)) \subset \mathcal{D}(A^n)$ *für alle* $t > n \cdot a_d$, $n \in \mathbb{N}$;

(ii) $T(\cdot)x \in \mathrm{C}^n((a_d \cdot n,\infty);X)$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$, $x \in X$;

(iii) $T \in \mathrm{C}^{n-1}((a_d \cdot n,\infty);\mathcal{B}(X))$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$ *und* $\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}T$ *gleichmäßig stetig.*

Ist T parabolisch, also $a_d = 0$, so gilt sogar

(iii) $\mathcal{R}(T(t)) \subset \mathcal{D}_\infty(A) = \bigcap_{n\geq 1}\mathcal{D}(A^n)$ *für alle* $t > 0$;

(iv) $T \in \mathrm{C}^\infty((0,\infty);\mathcal{B}(X))$.

Wir werden sehen, dass $A = \Delta$ eine parabolische C_0-Halbgruppe erzeugt. Differenzierbarkeit läßt sich vollständig durch die Eigenschaften der Resolvente von A charakterisieren.

Theorem 6.2.1. *Sei $T \in \mathcal{S}(X,M,\omega)$ mit Erzeuger A. Dann sind äquivalent:*

[1] Betrachte $\{S_t\}_{t\in[a,b]}$, wobei $S_t := AT(t)$ und $[a,b] \subset J_d$. Wegen $u(t;x) = T(t)x \in \mathrm{C}^1(J_d;X)$, ist S_t punktweise beschränkt in $\mathrm{C}([a,b];X)$ und Banach-Steinhaus liefert die gleichmäßige Beschränktheit von S_t in $\mathrm{C}([a,b];\mathcal{B}(X))$.

(i) T ist differenzierbar;

(ii) es existieren Konstanten $a \in \mathbb{R}$ und $b, C > 0$ mit

$$\Sigma_{a,b} = \{z \in \mathbb{C} : \mathfrak{Re} z \geq a - b \log |\mathfrak{Im} z|\} \subset \rho(A) \tag{6.1}$$

und

$$|(\lambda I - A)^{-1}| \leq C|\mathfrak{Im}\lambda|, \quad \forall \lambda \in \Sigma_{a,b},\ \mathfrak{Re}\lambda \leq \omega. \tag{6.2}$$

T ist genau dann parabolisch, wenn es zu jedem $b > 0$ Konstanten $a_b \in \mathbb{R}$, $C_b > 0$ gibt mit $\Sigma_{a_b,b} \subset \rho(A)$ und (6.2) gilt mit C_b.

Proof. (i) $\Rightarrow$ (ii): Sei also T differenzierbar für $t > t_0$. Betrachtet man die skalierte C_0-Halbgruppe $e^{-\lambda t}T(t)$ dessen Erzeuger $A - \lambda$ ist, so folgt für $e^{-\lambda t}T(t)$ gemäß (2.5) die Identität

$$e^{-\lambda t}T(t)x - x = (A - \lambda) \int_0^t e^{-\lambda s}T(s)\, ds$$

bzw.

$$e^{\lambda t}x - T(t)x = (\lambda - A) \int_0^t e^{\lambda(t-s)}T(s)\, ds =: (\lambda - A)B_\lambda(t);$$

es gilt $B'_\lambda(t) = T(t) + \lambda B_\lambda(t) \in \mathcal{B}(X)$. Differenzieren wir die obige Identität nach $t > 0$, so erhält man

$$\begin{aligned} \lambda e^{\lambda t}x - AT(t)x &= (\lambda - A)B'_\lambda(t)x, \quad \forall x \in X \\ &= B'_\lambda(t)(\lambda - A)x, \quad \forall x \in \mathcal{D}(A) \end{aligned} \tag{6.3}$$

für alle $\lambda \in \mathbb{C}$. Daraus erkennt man: Ist $\lambda e^{\lambda t} \in \rho(AT(t))$, d.h. $C(t) = \lambda e^{\lambda t} - AT(t)$ ist bijektiv in X, so gilt

$$x = (\lambda - A)B'_\lambda(t)C^{-1}(t)x, \quad \forall x \in X, \quad x = B'_\lambda(t)C^{-1}(t)(\lambda - A)x, \quad \forall x \in \mathcal{D}(A)\,.$$

Somit ist $B'_\lambda(t)C^{-1}(t)$ Links- und Rechtsinverse von $\lambda - A$, d.h. $\{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda e^{\lambda t} \in \rho(AT(t))\} \subset \rho(A)$ bzw.

$$\sigma(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda e^{\lambda t} \in \sigma(AT(t))\}.$$

Setzen wir noch $a(t) = |AT(t)|$ und berücksichtigen, dass $AT(t)$ ein beschränkter Operator für $t > t_0$ ist, dann gilt

$$\begin{aligned} \sigma(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda e^{\lambda t} \in \sigma(AT(t))\} &\subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda e^{\lambda t}| \leq a(t)\} \\ &\subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\mathfrak{Im}\,\lambda| \leq e^{-\mathfrak{Re}\,\lambda t}a(t)\} \end{aligned}$$

und daher

$$\begin{aligned}\rho(A) &\supset \{\lambda \in \mathbb{C} : \log|\mathfrak{Im}\,\lambda| > -\mathfrak{Re}\,\lambda t + \log(a(t))\}\\ &\supset \{\lambda \in \mathbb{C} : \mathfrak{Re}\lambda \geq \frac{1}{t}\log((1+\delta)a(t)) - \frac{1}{t}\log|\mathfrak{Im}\,\lambda|\} = \Sigma\end{aligned}$$

für alle $\delta > 0$. Setzt man $b = 1/t$ und $a = b\log((1+\delta)a(t))$, so findet man die Menge $\Sigma_{a,b}$ wieder. Als nächstes zeigen wir die Resolventenabschätzung (6.2). Dazu multiplizieren wir die Gleichung (6.3) von rechts mit der Resolvente,

$$R(\lambda, A) = \lambda^{-1}e^{-\lambda t}AT(t)R(\lambda, A) + \lambda^{-1}e^{-\lambda t}B'_\lambda(t).$$

Abschätzung für $\lambda = \sigma + i\tau$ liefert

$$\begin{aligned}|R(\lambda, A)| &= |\lambda|^{-1}e^{-\mathfrak{Re}\,\lambda t}\big(a(t)|R(\lambda, A)| + |T(t)|\big) + |\int_0^t e^{-\lambda s}T(s)\,ds|\\ &\leq |\tau|^{-1}e^{-\sigma t}a(t)|R(\lambda, A)| + |\tau|^{-1}e^{-\sigma t}|T(t)| + |\int_0^t e^{-\lambda s}T(s)\,ds|.\end{aligned}$$

Für $\lambda \in \Sigma$, d.h. $t\sigma \geq \log(1+\delta) + \log(a(t)) - \log|\tau|$, haben wir $|\tau|^{-1}a(t)e^{-t\sigma} \leq (1+\delta)^{-1}$ und daher die Abschätzung

$$\begin{aligned}|R(\lambda, A)| &\leq (1+\delta)^{-1}|R(\lambda, A)| + \frac{|T(t)|}{(1+\delta)a(t)} + M\int_0^t e^{(\omega-\sigma)s}\,ds\\ &\leq (1+\delta)^{-1}|R(\lambda, A)| + \frac{Me^{\omega t}}{(1+\delta)a(t)} + Mte^{(\omega-\sigma)t},\end{aligned}$$

falls $\mathfrak{Re}\lambda \leq \omega$. Diese Abschätzung ergibt unter Benutzung von $\lambda \in \Sigma$ weiter

$$\begin{aligned}|R(\lambda, A)| &\leq \frac{1+\delta}{\delta}Me^{\omega t}\left(\frac{1}{(1+\delta)a(t)} + te^{-\sigma t}\right)\\ &\leq \frac{1+\delta}{\delta}Me^{\omega t}\left(\frac{|\tau|}{(1+\delta)a(t)|\tau|} + t\frac{|\tau|}{(1+\delta)a(t)}\right)\\ &\leq \frac{1+\delta}{\delta}Me^{\omega t}\left(\frac{e^{\sigma t}}{(1+\delta)^2a(t)^2} + \frac{t}{(1+\delta)a(t)}\right)|\tau|\\ &\leq \frac{Me^{\omega t}}{\delta a(t)}\left(\frac{e^{\omega t}}{(1+\delta)a(t)} + t\right)|\tau| = C|\tau|.\end{aligned}$$

Dies zeigt (6.2).

(ii) $\Rightarrow$ *(i)*: Die Idee besteht darin den Operator

$$S(t) := \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{\lambda t}R(\lambda, A)\,d\lambda$$

zu untersuchen, wobei $\Gamma = \Gamma_- \cup \{z \in \mathbb{C} : \mathfrak{Re}z = a,\ -1 \leq \mathfrak{Im}z \leq 1\} \cup \Gamma_+$ mit

$$\Gamma_- = \{z \in \mathbb{C} : -\infty < \operatorname{Re} z < a,\ \operatorname{Im} z < 1,\ \mathfrak{Re}z = a - b\log(\mathfrak{Im}z)\},$$

$$\Gamma_+ = \{z \in \mathbb{C} : -\infty < \operatorname{Re} z < a,\ \operatorname{Im} z > -1,\ \mathfrak{Re} z = a - b\log(-\mathfrak{Im} z)\}$$

eine orientierte Kurve (Orientierung: von der unterer Halbebene zur oberen Halbebene) in $\mathbb{C}$ bedeutet. Hier wurde o.B.d.A. angenommen, dass $\omega < a$ gilt. Wenn nicht, dann ändert sich die Kurve $\{z \in \mathbb{C} : \mathfrak{Re} z = a,\ -1 \leq \mathfrak{Im} z \leq 1\}$ zu $\{z \in \mathbb{C} : \mathfrak{Re} z = a_0,\ -c_0 \leq \mathfrak{Im} z \leq c_0\}$ mit $c_0 = e^{-a_0/b}$ und einem $a_0 > \omega$. Die beiden anderen Kurven ändern sich dementsprechend. S ist wohldefiniert, d.h. das Integral konvergiert aufgrund der Abschätzung

$$\begin{aligned}
|S(t)| &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} e^{at}\frac{c}{\mathfrak{Re}\lambda - \omega}\,d\tau + \frac{2}{2\pi}C\int_1^\infty e^{\mathfrak{Re}\lambda t}|\tau|\,d\tau \\
&= \frac{e^{at}c}{2\pi(a-\omega)} + \frac{ce^{at}}{\pi}\int_1^\infty e^{-bt\log(\tau)}\tau\,d\tau \\
&= \frac{e^{at}c}{2\pi(a-\omega)} + \frac{ce^{at}}{\pi}\int_1^\infty \tau^{-bt+1}\,d\tau < \infty, \quad t > 2/b.
\end{aligned}$$

S ist sogar differenzierbar für $t > 3/b$, wie eine ähnliche Abschätzung zeigt, da

$$S'(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{\lambda t}\lambda R(\lambda, A)\,d\lambda.$$

Ferner gilt für $t > 3/b$ auch $S'(t) = AS(t)$, da

$$S'(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{\lambda t}\,d\lambda + \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{\lambda t}AR(\lambda, A)\,d\lambda, \quad t > 3/b,$$

und $e^{\lambda t}$ holomorph in $\mathbb{C}$ ist. Für $x \in \mathcal{D}(A^2)$ gilt nun

$$\begin{aligned}
R(\lambda, A)x &= \frac{1}{\lambda}\lambda R(\lambda, A)x = \frac{1}{\lambda}\big(I + R(\lambda, A)A\big)x \\
&= \lambda^{-1}x + \lambda^{-2}Ax + \lambda^{-2}R(\lambda, A)A^2x.
\end{aligned}$$

Folglich existiert $S(t)x$ für alle $t > 0$, falls $x \in \mathcal{D}(A^2)$, da in obiger Abschätzung sich der Integrand τ^{-bt+1} zu τ^{-bt-1} ändert und dieser für alle $t > 0$ integrierbar über $[1, \infty]$ ist. Nun gilt für $u(t; x) = S(t)x$ mit $x \in \mathcal{D}(A^3)$, dass $Au(t) \in \mathcal{D}(A)$ und

$$u'(t) = Au(t), \quad t > 0, \quad u(0) = x.$$

Wegen der Eindeutigkeit der Lösung muss $T(t)x = S(t)x$ für alle $t \geq 0$, $x \in \mathcal{D}(A^3)$ gelten, und da $\mathcal{D}(A^3)$ dicht in X liegt, folgt $T(t) = S(t)$ für $t > 3/b$. Daher ist T differenzierbar für $t > 3/b$.

Die letzte Behauptung folgt aus dem obigen Beweis. Im ersten Beweisabschnitt haben wir den Zusammenhang

$$b = 1/t, \quad a = b\log((1+\delta)a(t)), \quad C = \frac{Me^{\omega t}}{\delta a(t)}\left(\frac{e^{\omega t}}{(1+\delta)a(t)} + t\right)$$

gesehen, wobei $t > t_0$ gelten musste, d.h. aber $0 < b < 1/t_0$ falls $t_0 > 0$. Ist nun $t_0 = 0$, so bekommt man jedes beliebige $b > 0$. Im umgekehrten Fall sieht man aufgrund der Bedingung $t > 3/b$ mit $b > 0$ beliebig (groß), dass Differenzierbarkeit für alle $t > 0$ besteht. □

Eine „einfache hinreichende Bedingung“ für Differenzierbarkeit enthält das folgende Korollar.

Korollar 6.2.1. *Sei $T \in \mathcal{S}(X)$ mit Erzeuger A und sei*

$$c = \limsup_{|\tau|\to\infty} \log(|\tau|)|(i\tau + \omega - A)^{-1}| < \infty,$$

wobei $\omega > \omega_0(A)$. Dann ist T für $t > 3c$ differenzierbar. Ist $c = 0$, dann ist T parabolisch.

6.3. Analytische Halbgruppen

Sei T eine parabolische C_0-Halbgruppe mit Erzeuger A. Wir können o.B.d.A. $T \in \mathcal{S}(X, M, 0)$ annehmen, da ansonsten $S(t) = e^{-\omega t}T(t)$ für $T \in \mathcal{S}(X, M, \omega)$ betrachtet werden kann. Die Größe

$$\gamma(t) = |AT(t)|, \quad t > 0$$

ist stets endlich und nach rechts bechränkt, denn

$$\gamma(t + h) = |AT(t + h)| \le |AT(t)||T(h)| \le M\gamma(t), \quad t, h > 0$$

ist erfüllt. Für $t \to 0$ wird $\gamma(t)$ im Falle eines unbeschränkten A stets singulär; es gilt sogar $\int_0^1 \gamma(s)\, ds = \infty$. Dazu betrachten wir

$$I - \lambda(\lambda - A)^{-1} = -A(\lambda - A)^{-1} = -A \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)\, dt, \quad \lambda > 0,$$

und erhalten die Abschätzung/Konvergenz

$$|I - \lambda(\lambda - A)^{-1}| \le \int_0^1 \gamma(t)e^{-\lambda t}\, dt + \gamma(1)M \int_1^\infty e^{-\lambda t}\, dt \underset{\lambda\to\infty}{\to} 0,$$

falls $\int_0^1 \gamma(t)\, dt < \infty$ gilt (Lebesgue dominierende Konvergenz wurde benutzt.). Dies impliziert jedoch $B_\lambda := \lambda(\lambda - A)^{-1} \to I$ für $\lambda \to \infty$ in $\mathcal{B}(X)$. Dann wäre jedoch $(\lambda - A)^{-1}$ für hinreichend große $\lambda > 0$ invertierbar, da für B_λ^{-1} die Abschätzung gilt

$$|B_\lambda^{-1}| = |(I + [B_\lambda - I])^{-1}| \le \sum_k |I - B_\lambda|^k < \infty.$$

Dies steht im Widerspruch zur Unbeschränktheit von A.

Die einfachste nicht-integrierbare Funktion über $(0,1)$ ist $1/t$; sei also

$$\gamma(t) = |AT(t)| \leq \frac{M}{t}, \quad t > 0 \tag{6.4}$$

angenommen. Dann ist T sogar analytisch fortsetzbar in einen Sektor

$$\Lambda_\phi = \{z \in \mathbb{C}\backslash\{0\} : |\arg(z)| < \phi\}.$$

Dies folgt aus der Reihe

$$T(t+s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^n}{n!} \frac{d^n}{dt^n} T(t) = T(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{n!} [AT(t/n)]^n,$$

die konvergiert, falls

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|s|^n}{n!} (\frac{M}{t} n)^n} = \frac{M|s|}{t} \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}} \leq \frac{M|s|e}{t} < 1$$

gilt[2], d.h. $|s| < t/(Me)$ bzw. für $z = s + t = re^{i\varphi}$ die Bedingung $|z/t - 1| < 1/(Me)$. Minimierung über $t > 0$ führt auf $t = r/\cos(\varphi)$ und damit $\sin(\phi) = 1/(Me)$. Für jeden kleineren Sektor, also für $z \in \overline{\Lambda_\varphi}$ mit $\varphi < \phi = \arcsin(1/(Me))$, ist $T(z)$ beschränkt,

$$\begin{aligned}
|T(z)| &\leq |T(t)| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|z-t|^n}{n!} |AT(t/n)|^n \leq |T(t)| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(M|z/t-1|)^n n^n}{n!} \\
&\leq |T(t)| + \sum_{n=1}^{\infty} (Me|z/t-1|)^n = |T(t)| + \sum_{n=1}^{\infty} (Me|\sin(\varphi)|)^n \\
&= |T(t)| + \frac{Me|\sin(\varphi)|}{1 - Me|\sin(\varphi)|} < \infty.
\end{aligned}$$

Man erkennt ebenfalls, dass für $T \in \mathcal{S}(X, M, 0)$ wir die gleichmäßige Beschränktheit $|T(z)| \leq M_\varphi \leq M' + \frac{Me|\sin(\varphi)|}{1-Me|\sin(\varphi)|}$ für alle $z \in \overline{\Sigma_\varphi}$ erhalten. Weiterhin besitzt T auch die Halbgruppeneigenschaft für $z \in \Sigma_\phi \cup \{0\}$. Dies sieht man wie folgt:

Fixiere $t > 0$ und betrachte die Abbildung

$$\Sigma_\phi \cup \{0\} \ni z \mapsto T(t)T(z) \in \mathcal{B}(X),$$

welche analytisch ist. Nun gilt $T(t)T(z) = T(t+z)$ für $z \geq 0$. Der Identitätssatz für analytische Funktionen liefert $T(t)T(z) = T(t+z)$ für alle $z \in \Sigma_\phi$. Als nächstes fixiere $z_1 \in \Sigma_\phi$ und betrachte die Abbildung

$$\Sigma_\phi \cup \{0\} \ni z \mapsto T(z_1)T(z) \in \mathcal{B}(X),$$

[2] Benutze die Ungleichung $n!e^n \geq n^n$, $n \geq 1$.

welche wieder analytisch ist, sowie $T(z_1)T(z) = T(z_1 + z)$ für alle $z \geq 0$. Der Identitätsatz zeigt wieder $T(z_1)T(z) = T(z_1+z)$ für alle $z \in \Sigma_\phi$ und damit auch für alle $z_1 \in \Sigma_\phi$.

Als letztes zeigen wir, dass $T(z)$ stark gegen I für $z \to 0$ mit $z \in \overline{\Sigma_\varphi}$. Sei dazu $x \in X$ und $\varepsilon > 0$. Dann existiert aufgrund der starken Stetigkeit von $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ ein $h_0 = h_0(\varepsilon) > 0$, so dass $|T(h)x - x| < \varepsilon \frac{1}{M_\varphi}$ für alle $0 < h < h_0$. Damit gilt nun für $z \in \overline{\Sigma_\varphi}$

$$\begin{aligned}
|T(z)x - x| &\leq |T(z)(x - T(h)x)| + |T(h+z)x - T(h)x| + |T(h)x - x| \\
&< |T(z)|\varepsilon \frac{1}{M_\varphi} + |T(h+z)x - T(h)x| + \varepsilon \frac{1}{M_\varphi} \\
&\leq \varepsilon + |T(h+z)x - T(h)x| + \varepsilon \frac{1}{M_\varphi} \\
&\leq 2\varepsilon + |T(h+z)x - T(h)x|.
\end{aligned}$$

Die Abbildung $z \mapsto T(h+z) \in \mathcal{B}(X)$ ist analytisch in einer Umgebung von $z = 0$ ($0 < h$!) und somit $|T(z+h) - T(h)| < \varepsilon |x|^{-1}$ in $\mathcal{B}(X)$ für $0 < |z| < h_1(\varepsilon)$ mit geeignetem $h_1 > 0$. Damit haben wir für $0 < |z| < h_1(\varepsilon)$ die Abschätzung

$$|T(z)x - x| \leq 2\varepsilon + |T(h+z) - T(h)||x| < 3\varepsilon.$$

Es ist klar, dass $T(z)X \subset \mathcal{D}(A)$ für $z \in \Sigma_\phi$ gilt, da

$$|AT(z)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z-t|^n}{n!} |AT(t/(n+1))|^{n+1} < \infty,$$

wenn man z.B. die Ungleichung $n!(2e)^{n+1} \geq (n+1)^{n+1}$ benutzt.[3] Sei nun T holomorph auf Λ_ϕ und besitze die obigen Eigenschaften, insbesondere $|T(z)| \leq M_\varphi$ auf jeden kleineren Sektor $\overline{\Lambda_\varphi}$, $\varphi < \phi$, also gleichmäßig beschränkt. Ein solches T nennen wir analytische/holomorphe Halbgruppe, genauer

Definition 6.3.1. *Eine Familie von Operatoren $\{T(z)\}_{z \in \Sigma_\phi \cup \{0\}} \subset \mathcal{B}(X)$ wird analytische/holomorphe Halbgruppe (mit Winkel $\phi \in (0, \pi/2)$) genannt, falls*

(i) $T(0) = I$ und $T(z_1)T(z_2) = T(z_1 + z_2)$ für alle $z_1, z_1 \in \Sigma_\phi$;

(ii) die Abb. $z \mapsto T(z)$ ist analytisch in Σ_ϕ;

(iii) $\lim_{z \in \Sigma_\varphi, z \to 0} T(z)x = x$ für alle $x \in X$ und $0 < \varphi < \phi$.

Gilt zusätzlich $|T(z)| \leq M_\varphi$ mit einem $M_\varphi \geq 1$ für alle $z \in \overline{\Sigma_\varphi}$, $0 < \varphi < \phi$, so heißt T beschränkte analytische/holomorphe Halbgruppe.

[3] Induktionsschritt: $(n+1)!(2e)^{n+2} \geq (n+1)2e(n+1)^{n+1} = \frac{e}{(1+1/(n+1))^{n+1}} \frac{2}{1+1/(n+1)} (n+2)^{n+2} \geq (n+2)^{n+2}$.

Berücksichtigt man, dass T analytisch und beschränkt in Λ_φ ist und $e^{-\lambda z}$ ebenfalls, so bekommt man

$$(\lambda - A)^{-1} = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)\, dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t e^{\pm i\varphi}} T(te^{\pm i\varphi})\, dt.$$

Denn für den Fall „$e^{+i\varphi}$" gilt nach dem Integralsatz von Cauchy

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} T(z) e^{-\lambda z}\, dz$$

mit der orientierten Kurve $\Gamma_R := \Gamma_R^1 \cup \Gamma_R^2 \cup \Gamma_R^3$, definiert durch

$$\begin{aligned}
\Gamma_R^1 &= \{z \in \mathbb{C} : z = t,\ 0 \leq t \leq R\},\\
\Gamma_R^2 &= \{z \in \mathbb{C} : z = Re^{i\theta},\ 0 \leq \theta \leq \varphi\},\\
\Gamma_R^3 &= \{z \in \mathbb{C} : z = (R-t)e^{i\varphi},\ 0 \leq t \leq R\}.
\end{aligned}$$

Beachten Sie, dass

$$\begin{aligned}
|\int_{\Gamma_R^2} T(z) e^{-\lambda z}\, dz| &= |\int_0^\varphi T(Re^{i\theta}) e^{-\lambda Re^{i\theta}} Rie^{i\theta}\, d\theta| \leq \int_0^\varphi R|T(Re^{i\theta})| e^{-R\mathfrak{Re}\,(\lambda e^{i\theta})}\, d\theta\\
&\leq M_\varphi \int_0^\varphi Re^{-R\mathfrak{Re}\,(\lambda e^{i\theta})}\, d\theta \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0,
\end{aligned}$$

sofern nur $\mathfrak{Re}(\lambda e^{i\theta}) = |\lambda| \cos(\arg(\lambda) + \theta) \geq \varepsilon > 0$ für $\theta \in [0, \varphi]$ und somit

$$Re^{-|\lambda| R \cos(\arg(\lambda)+\theta)} \leq Re^{-|\lambda| R\varepsilon} \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Dies ist immer dann erfüllt, falls $\arg(\lambda) \in (-\pi/2, 0]$, was

$$-\pi/2 < \arg(\lambda) \leq \arg(\lambda) + \theta \leq \varphi < \pi/2$$

impliziert und damit $\varepsilon = \min\{\cos(\arg(\lambda)), \cos(\varphi)\} > 0$. Für den Fall „$e^{-i\varphi}$" muss daher $\arg(\lambda) \in [0, \pi/2)$ gelten. Es folgt die Abschätzung

$$|(\lambda - A)^{-1}| \leq M_\varphi \int_0^\infty e^{-t|\lambda| \cos(\arg(\lambda) \pm \varphi)}\, dt = \frac{M_\varphi}{|\lambda| c_{\lambda,\varphi}},$$

$$c_{\lambda,\varphi} = \begin{cases} \cos(\arg(\lambda) + \varphi) & \arg(\lambda) \in (-\pi/2, 0] \\ \cos(\arg(\lambda) - \varphi) & \arg(\lambda) \in [0, -\pi/2) \end{cases}$$

für $\mathfrak{Re}\,\lambda > 0$ bzw. für $\lambda = r + is \in \Sigma_{\pi/2}$ die Abschätzung

$$|(\lambda - A)^{-1}| \leq \frac{C}{|r + is|} \leq \frac{C}{|s|}, \quad \forall s \in \mathbb{R}\backslash\{0\},\ r > 0.$$

E. Hille war der Erste, der gesehen hat, dass diese Abschätzung bereits hinreichend für die Erzeugung einer parabolischen C_0-Halbgruppe mit (6.4), also einer analytischen Halbgruppe ist.

Theorem 6.3.1. *Sei $A : \mathcal{D}(A) \subset X \to X$ ein linearer, abgeschlossener und dicht definierter Operator im Banchraum X. Dann sind äquivalent*

(a) A ist Erzeuger einer beschränkten parabolischen C_0-Halbgruppe T mit

$$|AT(t)| \leq \frac{M}{t}, \quad \forall t > 0; \tag{6.5}$$

(b) A ist Erzeuger einer beschränkten analytischen Halbgruppe T;

(c) $\{\lambda \in \mathbb{C} : \mathfrak{Re}\,\lambda > 0\} = \Sigma_{\pi/2} \subset \rho(A)$ und es gibt ein $C \geq 1$, so dass

$$|(r + is - A)^{-1}| \leq \frac{C}{|s|}, \quad \forall r > 0, s \in \mathbb{R}\backslash\{0\}; \tag{6.6}$$

(d) $-A$ ist sektoriell mit Winkel $\phi_{-A} \in [0, \pi/2)$, d.h. $\Sigma_{\pi-\phi_{-A}} \subset \rho(A)$ und für alle $\delta \in (0, \pi/2 - \phi_{-A})$ gibt es ein $C' = C'(\delta) \geq 1$, so dass die Abschätzung

$$|\lambda(\lambda - A)^{-1}| \leq C', \quad \forall \lambda \in \overline{\Sigma_{\pi/2+\delta}} \tag{6.7}$$

gilt.

Bemerkung 6.3.1. Im Gegensatz zu Hille-Yosida ist bei den obigen Resolventenabschätzungen die Größe der Konstanten $C, C' \geq 1$ nicht wichtig bzw. es müssen nicht alle Potenzen der Resolvente abgeschätzt werden. Insbesondere sind sektorielle Operatoren mit Spektralwinkel kleiner $\pi/2$ Erzeuger von C_0-Halbgruppen, d.h. diese erfüllen die Resolventenabschätzungen (3.5) des Hille-Yosida Theorems 3.3.1.

Proof. Wir haben bereits *(a)* ⇒ *(b)* ⇒ *(c)* gezeigt. Die Implikation *(c)* ⇒ *(d)* folgt im wesentlichen durch eine Reihenentwicklung. Doch zuvor folgendes Lemma.

Lemma 6.3.1. *Sei $A : \mathcal{D}(A) \subset X \to X$ ein abgeschlossener Operator mit nichtleerer Resolventenmenge $\rho(A)$. Dann gilt*

(i) $\sigma(R(\lambda_0, A))\backslash\{0\} = (\lambda_0 - \sigma(A))^{-1} := \{\frac{1}{\lambda_0 - \mu} : \mu \in \sigma(A)\}$ für alle $\lambda_0 \in \rho(A)$;

(ii) ein analoges Resultat gilt für die Spektren $\sigma_p(A)$, $\sigma_{app}(A)$ und $\sigma_r(A)$;

(iii) für jedes $\lambda_0 \in \rho(A)$ gilt die Abschätzung

$$\operatorname{dist}(\lambda_0, \sigma(A)) = \frac{1}{r(R(\lambda_0, A))} \geq \frac{1}{|R(\lambda_0, A)|}.$$

Proof. Sei $\mu \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ und $\lambda_0 \in \rho(A)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}(\mu - R(\lambda_0, A))x &= (\mu(\lambda_0 - A) - I)R(\lambda_0, A)x \\ &= \mu([\lambda_0 - \tfrac{1}{\mu}] - A)R(\lambda_0, A)x, \quad x \in X\end{aligned}$$

$$= \mu R(\lambda_0, A)([\lambda_0 - \tfrac{1}{\mu}] - A)x, \quad x \in \mathcal{D}(A)\,.$$

Diese Identität zeigt

$$\mathcal{N}\left(\mu - R(\lambda_0, A)\right) = \mathcal{N}\left([\lambda_0 - \tfrac{1}{\mu}] - A\right),$$
$$\mathcal{R}\left(\mu - R(\lambda_0, A)\right) = \mathcal{R}\left([\lambda_0 - \tfrac{1}{\mu}] - A\right).$$

Die erste Relation liefert $\mu \in \sigma_p(R(\lambda_0, A))$ genau dann, wenn $[\lambda_0 - \frac{1}{\mu}] \in \sigma_p(A)$. Für das approx. Spektrum wird nur der Fall betrachtet, dass das Bild nicht abgeschlossen ist, da im Falle von Nicht-Injektivität wieder die erste Identität benutzt wird. Die zweite Relation liefert nun: $\mathcal{R}\left(\mu - R(\lambda_0, A)\right)$ ist nicht abgeschlossen genau dann, wenn $\mathcal{R}\left([\lambda_0 - \frac{1}{\mu}] - A\right)$ nicht abgeschlossen, d.h. aber $\mu \in \sigma_{app}(R(\lambda_0, A))$ genau dann, wenn $[\lambda_0 - \frac{1}{\mu}] \in \sigma_{app}(A)$. Für das residuelle Spektrum wird auch wieder die zweite Identität benutzt, da $\overline{\mathcal{R}\left(\mu - R(\lambda_0, A)\right)} \neq X$ genau dann, wenn $\overline{\mathcal{R}\left(\mu - R(\lambda_0, A)\right)} \neq X$. Damit ist *(ii)* gezeigt und wegen $\sigma(A) = \sigma_{app}(A) \cup \sigma_r(A)$ auch *(i)*.

Die letzte Behauptung folgt direkt aus *(i)*. □

Die Abschätzung (6.6) kombiniert mit dem Lemma 6.3.1 liefert

$$\frac{1}{C}|s| \leq \operatorname{dist}(r + is, \sigma(A)) \quad \forall r > 0, s \in \mathbb{R}\backslash\{0\},$$

d.h. aber $i\mathbb{R}\backslash\{0\} \subset \rho(A)$. (Angenommen $is_0 \in \sigma(A)$. Dann wähle zu $r + is_0$ einfach $r < 1/C|s_0|$ — ein Widerspruch.) Es gilt ebenfalls die Abschätzung (6.6) aufgrund der Stetigkeit der Resolvente. Sei nun $\mu \in i\mathbb{R}\backslash\{0\}$. Betrachte die Reihenentwicklung

$$(\lambda - A)^{-1} = (\mu - A)^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \mu)^k (\mu - A)^{-k}.$$

Die Reihe konvergiert wieder, falls $|\lambda/\mu - 1| < 1/C$ gilt, d.h. mit $\lambda = Re^{\pm i(\pi/2+\delta)}$ und $\mu = re^{\pm i\pi/2}$, $r = R/\cos(\delta)$, erhält man die optimale Bedingung

$$|\lambda/\mu - 1| = |\sin(\delta)| < 1/C = \sin(\phi).$$

Also lässt sich $(\lambda - A)^{-1}$ auf $\Sigma_{\pi/2+\phi} = \{z \in \mathbb{C} : |\arg z| < \pi/2 + \phi\}$, $\phi = \arcsin(1/C)$, fortsetzen und damit $\phi_{-A} = \pi/2 - \phi$. Auf jedem kleineren Sektor $\overline{\Sigma_{\pi/2+\delta}}$, $\delta < \phi$, haben wir die Abschätzung

$$|(\lambda - A)^{-1}| \leq |(\mu - A)^{-1}| \frac{1}{1 - |\lambda/\mu - 1|C} \leq \frac{C}{|\mu|} \frac{1}{1 - |\lambda/\mu - 1|C}$$
$$= \frac{1}{|\lambda|} \frac{C \cdot \cos(\delta)}{1 - |\sin(\delta)|C} = \frac{C'}{|\lambda|}, \quad \forall \lambda \in \overline{\Sigma_{\pi/2+\delta}},$$

wobei zu $\lambda = Re^{\pm i(\pi/2+\delta)} \in \overline{\Sigma_{\pi/2+\delta}}$ wir wieder $\mu = Re^{\pm i\pi/2}/\cos(\delta)$ gewählt haben.

Als letztes haben wir *(d)* $\Rightarrow$ *(a)* zu zeigen. Wir definieren nun

$$T(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{\lambda t}(\lambda - A)^{-1}\,d\lambda, \quad t > 0, \tag{6.8}$$

wobei $\Gamma = \Gamma_\varphi^- \cup \Gamma_R \cup \Gamma_\varphi^+$ den folgenden orientierten Weg bezeichnet

$$\begin{aligned}
\Gamma_\varphi^{-\infty} &= \{z \in \mathbb{C} : z = re^{i(-\pi/2-\varphi)}, -\infty < r < R\},\\
\Gamma_R &= \{z \in \mathbb{C} : z = Re^{i\theta}, -\pi/2 - \varphi \leq \theta \leq \pi/2 + \varphi\},\\
\Gamma_\varphi^{+\infty} &= \{z \in \mathbb{C} : z = re^{i(\pi/2+\varphi)}, R < r < \infty\}.
\end{aligned}$$

Die Wahl von $R > 0$ und $\varphi \in (0, \phi)$ ist dabei unerheblich. Aufgrund der Abschätzung und der Wahl $R = 1/t$

$$\begin{aligned}
|T(t)| &\leq \frac{C_\varphi}{\pi}\int_0^{\pi/2+\varphi} \frac{|e^{\lambda t}|}{|\lambda|} R\,d\theta + \frac{C_\varphi}{\pi}\int_R^\infty \frac{|e^{\lambda t}|}{|\lambda|}\,dr\\
&= \frac{C_\varphi}{\pi}\int_0^{\pi/2+\varphi} \frac{e^{R\cos(\theta)t}}{R} R\,d\theta + \frac{C_\varphi}{\pi}\int_R^\infty \frac{e^{r\cos(\pi/2+\varphi)t}}{r}\,dr\\
&= \frac{C_\varphi}{\pi}\int_0^{\pi/2+\varphi} e^{R\cos(\theta)t}\,d\theta + \frac{C_\varphi}{\pi}\int_R^\infty e^{-rt\sin(\varphi)}(rt)^{-1}\,d(tr), \quad R = 1/t,\\
&= \frac{C_\varphi}{\pi}\int_0^{\pi/2+\varphi} e^{\cos(\theta)}\,d\theta + \frac{C_\varphi}{\pi}\int_1^\infty e^{-s\sin(\varphi)}s^{-1}\,ds \leq M_0
\end{aligned}$$

existiert das Integral stets, d.h. $\{T(t)\}_{t\geq 0} \subset \mathcal{B}(X)$. Ebenso sieht man, dass

$$\begin{aligned}
|\frac{d}{dt}T(t)| &\leq \frac{C_\varphi}{\pi}\int_0^{\pi/2+\varphi} |e^{\lambda t}|R\,d\theta + \frac{C_\varphi}{\pi}\int_R^\infty |e^{\lambda t}|\,dr, \quad R = 1/t\\
&= \frac{C_\varphi}{\pi t}\left(\int_0^{\pi/2+\varphi} e^{\cos(\theta)}\,d\theta + \int_1^\infty e^{-rt\sin(\varphi)}\,dr\right) \leq \frac{M_1}{t}
\end{aligned}$$

erfüllt ist, d.h. T ist parabolisch und (6.5) gilt. Schließlich ergibt sich

$$T'(t) - AT(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (\lambda - A)(\lambda - A)^{-1}e^{\lambda t}\,d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{\lambda t}\,dt = 0$$

für alle $t > 0$ und wegen $\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{e^{\lambda t}}{\lambda}\,d\lambda = 1$ gilt ebenfalls die C_0-Eigenschaft (auf der dichten Teilmenge $\mathcal{D}(A) \subset X$ von X), denn

$$\begin{aligned}
T(t)x - x &= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{\lambda t}\big((\lambda - A)^{-1} - \frac{1}{\lambda}\big)x\,d\lambda\\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{e^{\lambda t}}{\lambda}(\lambda - A)^{-1}Ax\,d\lambda
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{e^{\lambda t}-1}{\lambda}(\lambda - A)^{-1}Ax\,d\lambda + \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{1}{\lambda}(\lambda - A)^{-1}Ax\,d\lambda$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{e^{\lambda t}-1}{\lambda}(\lambda - A)^{-1}Ax\,d\lambda \underset{t\to 0}{\to} 0, \quad \forall x \in \mathcal{D}(A)\,.$$

Das Integral $\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{1}{\lambda}(\lambda - A)^{-1}Ax\,d\lambda$ verschwindet aufgrund Cauchy's Integralsatz. Für die geschlossene (orientierte) Kurve $K_L := \Gamma_\varphi^{-L} \cup \Gamma_R \cup \Gamma_\varphi^{+L} \cup \hat{\Gamma}^L$ mit $L > R$ und $\hat{\Gamma}^L = \{z \in \mathbb{C} : z = Le^{i\theta}, -\pi/2 - \varphi \le \theta \le \pi/2 + \varphi\}$ gilt

$$0 = \frac{1}{2\pi i}\int_{K_L} \frac{1}{\lambda}(\lambda - A)^{-1}Ax\,d\lambda,$$

sowie

$$\lim_{L\to\infty} \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\hat{\Gamma}^L} \frac{1}{\lambda}(\lambda - A)^{-1}Ax\,d\lambda\right| \le \lim_{L\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2-\varphi}^{\pi/2+\varphi} \frac{C'}{L^2}L\,d\theta = 0.$$

Die obige Grenzwertaussage folgt aus Lebesgue's dominierender Konvergenz, da zum einen $[e^{\lambda t} - 1]/\lambda \to 0$ für $t \to 0$ gilt, und zum anderen wir die Abschätzung

$$\left|\frac{e^{\lambda t}-1}{\lambda}(\lambda - A)^{-1}Ax\right| \le \frac{1 + e^{t\mathfrak{Re}\,\lambda}}{|\lambda|^2}C'|Ax| \le \frac{1+e^{tR}}{|\lambda|^2}C'|Ax|, \quad \lambda \in \Gamma, t > 0$$

haben, wobei natürlich $\frac{1+e^{tR}}{|\lambda|^2}$ über Γ integrierbar ist.

Zum Schluß wird die Halbgruppeneigenschaft gezeigt. Wähle dazu zwei Kurven Γ (siehe oben mit $R = 1$) und Γ', so dass $\Gamma \cap \Gamma' = \varnothing$ und $\Gamma' = \Gamma + c$ mit einem $c > 0$. Dann gilt für $s, t \in \mathbb{R}_+$ (Fubini wird angewendet!)

$$\begin{aligned}
T(t)T(s) &= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{\mu t}R(\mu, A)\,d\mu\,\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'} e^{\lambda t}R(\lambda, A)\,d\lambda \\
&= \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_\Gamma e^{\mu t}e^{\lambda t}R(\mu, A)R(\lambda, A)\,d\lambda\,d\mu \\
&= \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_\Gamma\int_{\Gamma'} \frac{e^{\mu t}e^{\lambda t}}{\lambda - \mu}[R(\lambda, A) - R(\mu, A)]\,d\lambda\,d\mu \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{\mu t}R(\mu, A)\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'} \frac{e^{\lambda t}}{\lambda - \mu}\,d\lambda\right)d\mu \\
&\quad - \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'} e^{\lambda t}R(\lambda, A)\left(\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{e^{\mu t}}{\lambda - \mu}\,d\mu\right)\,d\lambda.
\end{aligned}$$

Cauchy's Theorem liefert

$$\int_{\Gamma'} \frac{e^{\lambda t}}{\lambda - \mu}\,d\lambda = e^{\mu t}, \quad \int_\Gamma \frac{e^{\mu t}}{\lambda - \mu}\,d\mu = 0$$

und somit ist $T(t)T(s) = T(t + s)$ gezeigt. □

Die Resolventenabschätzung (6.7) ist i.a. nicht einfach zu verifizieren. In Analogie zum Lumer-Phillips Resultat läßt sie sich mit Hilfe der Dualitätsabbildung vereinfachen.

Theorem 6.3.2. *Sei $A : \mathcal{D}(A) \subset X \to X$ ein linearer und dicht definierter Operator im Banachraum X. Dann sind äquivalent*

(i) A ist Erzeuger einer analytischen Halbgruppe T auf dem Sektor Σ_ϕ, $\phi \in (0, \pi/2)$, mit

$$|T(z)| \leq M_\theta, \quad \forall z \in \overline{\Sigma_\theta}, \quad \theta \in (0, \phi); \tag{6.9}$$

(ii) $\mathcal{R}((\lambda_0 - A)) = X$ für ein $\lambda_0 > 0$, und zu jedem $x \in \mathcal{D}(A)$ existiert ein $x^* \in \mathcal{F}(x)$ mit

$$\tan(\theta) \cdot |\mathfrak{Im}\, \langle x^*, Ax\rangle| \leq -\mathfrak{Re}\, \langle x^*, Ax\rangle. \tag{6.10}$$

Proof. (i) $\Rightarrow$ (ii): Die erste Eigenschaft ist nach Lumer-Phillips klar; ferner ist nach demselben Satz der Erzeuger $e^{\pm i\theta}A$ der C_0-Halbgruppe $S(t) = T(te^{\pm i\theta})$ dissipativ. Es gilt also

$$\mathfrak{Re}\, \langle x^*, e^{\pm i\theta}Ax\rangle \leq 0, \quad \forall x \in \mathcal{D}(A), \tag{6.11}$$

wobei $x^* \in \mathcal{F}(x)$ so gewählt wird, dass obige linke Seite minimal wird. Diese Ungleichung ist dann äquivalent zu

$$\pm \tan(\theta)\mathfrak{Im}\, \langle x^*, Ax\rangle \leq -\mathfrak{Re}\, \langle x^*, Ax\rangle, \quad \forall x \in \mathcal{D}(A)$$

d.h. (6.10) ist gezeigt.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Aus (6.10) folgt, dass A dissipativ ist. Der Satz von Lumer-Phillips liefert die Existenz der von A erzeugten C_0-Halbgruppe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$, die insbesondere beschränkt ist ($\omega = 0$); folglich gilt sogar $\mathcal{R}(\lambda - A) = X$ für alle $\lambda \in \Sigma_{\pi/2}$. Betrachtet man $\Sigma_{\pi/2} \ni \lambda = \mu e^{i\varphi}$, $|\varphi| \leq \theta < \pi/2$, so erhält man

$$\mathcal{R}\left(\mu - e^{i\varphi}A\right) = X, \quad |\varphi| \leq \theta,\ \mu > 0,$$

und die Äquivalenz der Ungleichungen kombiniert mit $\tan(\varphi) \leq \tan(\theta)$ für alle $|\varphi| \leq \theta$ zeigt die Dissipativität von $e^{i\varphi}A$. Der Satz von Lumer-Phillips liefert die Existenz der von $e^{i\varphi}A$ erzeugten C_0-Halbgruppe, die beschränkt ist und durch $T(te^{i\varphi})$ gegeben ist (Eindeutigkeit!); da $X = \mathcal{R}\left(\lambda - e^{\pm i\theta}A\right)$ sogar für $\mathfrak{Re}\,\lambda > 0$ richtig ist, folgt

$$X = \mathcal{R}\left(\lambda - e^{\pm i\theta}A\right) = \mathcal{R}\left(\lambda e^{\mp i\theta} - A\right), \quad \forall \lambda \in \Sigma_{\pi/2},$$

d.h. aber $\mathcal{R}(\xi - A) = X$ für alle $\xi \in \Sigma_{\pi/2+\delta}$ mit einem $\delta > 0$. Um die Holomorphie von T nachzurechnen, zeigen wir die Ungleichung (6.6), wobei wegen des eben gezeigten nur die Ungleichung

$$|(\lambda - A)x| \geq C^{-1}|\lambda|, \quad \lambda \in \Sigma_{\pi/2}, \quad x \in \mathcal{D}(A)$$

verifiziert werden muss. Sei also $x \in \mathcal{D}(A)$ und betrachte sogar $\lambda \in \overline{\Sigma_{\pi/2}} \backslash \{0\}$, d.h. $\lambda = \sigma + i\tau$ mit $\sigma \geq 0$, $|\tau| \neq 0$. Dann gilt für jenes $x^* \in \mathcal{F}(x)$, welches die Ungleichung (6.10) erfüllt,

$$
\begin{aligned}
|(\lambda - A)x|^2|x|^2 \geq |\langle x^*, (\lambda - A)x\rangle|^2 &= \left|\lambda|x|^2 - \langle x^*, Ax\rangle\right|^2 \\
&= |\lambda|^2|x|^4 - 2\sigma|x|^2\mathfrak{Re}\,\langle x^*, Ax\rangle - 2\tau|x|^2\mathfrak{Im}\,\langle x^*, Ax\rangle \\
&\quad + (\mathfrak{Re}\langle x^*, Ax\rangle)^2 + (\mathfrak{Im}\,\langle x^*, Ax\rangle)^2 \\
&\geq |\lambda|^2|x|^4 + (\mathfrak{Re}\langle x^*, Ax\rangle)^2 - 2\tau|x|^2\mathfrak{Im}\,\langle x^*, Ax\rangle + (\mathfrak{Im}\,\langle x^*, Ax\rangle)^2 \\
&\geq |\lambda|^2|x|^4 - 2|\lambda||x|^2\mathfrak{Im}\,\langle x^*, Ax\rangle + (1 + \tan(\theta)^2)(\mathfrak{Im}\,\langle x^*, Ax\rangle)^2 \\
&\geq |\lambda|^2|x|^4 - |\lambda|^2|x|^4(1 + \tan(\theta)^2)^2 = \sin(\theta)^2|\lambda|^2|x|^4.
\end{aligned}
$$

Daraus schliessen wir $C = \sin(\theta)$ in obiger Ungleichung. □

Beachten Sie, dass $\tan(\theta) > 0$ in (6.10) nur irgendeine positive Konstante darstellt.

Es folgt ein abstraktes aber wichtiges Beispiel.

Korollar 6.3.1. *Sei $A : \mathcal{D}(A) \subset H \to H$ ein normaler Operator im Hilbertraum H (Dies impliziert sofort, dass $\mathcal{D}(A)$ dicht in H ist, sowie ebenfalls die Dichtheit von $\mathcal{D}(AA^*) = \mathcal{D}(A^*A)$ in H.) mit*

$$
\sigma(A) \subset \{z \in \mathbb{C} : |\arg(-z) < \delta\}, \quad \delta < \pi/2.
$$

Dann erzeugt A eine beschränkte analytische Halbgruppe.

Proof. Zur Erinnerung: A heißt normal, falls $AA^* = A^*A$, was $\mathcal{D}(AA^*) = \mathcal{D}(A^*A)$ beinhaltet. Damit ist ebenfalls die Resolvente $(\lambda - A)^{-1}$ normal, da $(\lambda - A)(\lambda - A)^* = (\lambda - A)^*(\lambda - A)$ gilt. Für normale beschränkte Operatoren N gilt nun $|N^n| = |N|^n$ und damit $r(N) = |N|$. Dies sieht man so: Es gilt $|N| = |N^*|$ aufgrund von

$$
|Nu|^2 = (Nu|Nu) = (N^*Nu|u) = (NN^*u|u) = |N^*u|.
$$

Weiterhin haben wir $|NN^*| \leq |N|^2$ und

$$
|NN^*| = \sup_{|u|\leq 1} \sup |v| \leq 1(NN^*u|v) = \sup_{|u|\leq 1} \sup |v| \leq 1(Nu|Nv) \geq \sup_{|u|\leq 1} |Nu|^2 = |N|^2.
$$

Dies impliziert zusammen $|NN^*| = |N|^2$. Damit kann man zeigen, dass auch

$$
|N^n|^2 = |(NN^*)^n| = |N^n(N^n)^*| = |NN^*|^n = |N|^{2n}
$$

gilt. (Beachte, dass $(NN^*)(NN^*)$ wieder normal ist etc.)

Zurück zur Resolvente, die ja normal ist, also $|R(\lambda, A)| = r(R(\lambda, A))$. Aus der Resolventenidentität

$$
R((\xi - \lambda)^{-1}, R(\lambda, A)) = -(\xi - \lambda) - (\xi - \lambda)^2 R(\xi, A)
$$

folgt nun $\xi \in \rho(A)$ genau dann, wenn $(\xi - \lambda)^{-1} \in \rho(R(\lambda))$, bzw. $\xi \in \sigma(A)$ genau dann, wenn $(\xi - \lambda)^{-1} \in \sigma(R(\lambda))$. Letztere Aussage impliziert

$$r(R(\lambda, A)) := \sup_{\xi \in \sigma(R(\lambda,A))} |\xi| = \sup_{(\xi-\lambda)^{-1} \in \sigma(R(\lambda,A))} |\xi - \lambda|^{-1} = \sup_{\xi \in \sigma(A)} |\xi - \lambda|^{-1}$$

und daher

$$|R(\lambda, A)| = r(R(\lambda, A)) = \sup_{\xi \in \sigma(A)} |\xi - \lambda|^{-1}, \quad \forall \lambda \in \rho(A).$$

Schränken wir uns auf $\lambda = r + i\tau$, $\tau \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ und $r > 0$, ein und vergrößern $\sigma(A)$ durch $\mathbb{C}\backslash\Sigma_{\pi-\delta}$ (Beachte $\sigma(A) \subset \{z \in \mathbb{C} : |\arg(-z) < \delta\}$ mit einem $\delta < \pi/2$.), so können wir die rechte Seite weiter abschätzen

$$\begin{aligned} |R(ir, A)| &= \sup_{\xi \in \sigma(A)} |\xi - ir|^{-1} = \frac{1}{\operatorname{dist}(ir, \sigma(A))} \leq \frac{1}{\operatorname{dist}(ir, \mathbb{C}\backslash\Sigma_{\pi-\delta})} \\ &= \frac{C}{|r|}, \quad r \neq 0, \quad C := \tan(\pi/2 - \delta)^{-1}. \end{aligned}$$

□

Kapitel 7

Die inhomogene Gleichung

Wir betrachten wieder das inhomogene Cauchy-Problem

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}u(t) + Au(t) &= f(t), \quad t > 0, \\ u(0) &= x. \end{aligned} \tag{7.1}$$

Wir wissen bereits, dass die mögliche Lösung durch

$$u(t) = T(t)x + \int_0^t T(t-s)f(s)\,ds$$

gegeben ist. $T(t)x$ mit $x \in X$ ist für jedes $t > 0$ die starke Lösung des homogenen Problems, wenn T parabolisch ist. Wir haben also

$$T(\cdot)x \in \mathrm{C}^\infty((0,\infty);X) \cap \mathrm{C}([0,\infty);X), \quad T(t)x \in \mathcal{D}_\infty(A), \quad \forall t > 0.$$

7.1. Die inhomogene Gleichung in C^α

Als erstes studieren wir die obige Gleichung in C^α, d.h. wir interessieren uns für die Regularität von u, falls

$$f \in \mathrm{C}^\alpha(J;X) := \{v \in \mathrm{C}(J;X) : \sup_{t\in J}|v(t)| + [v]_{\alpha,J} < \infty\}$$

mit $J = [0,T]$, $T < \infty$, bzw. für $J = \mathbb{R}_+$

$$f \in \mathrm{BUC}^0_\alpha(\mathbb{R}_+;X) := \{v \in \mathrm{BUC}(\mathbb{R}_+;X) : [v]_\alpha < \infty\}$$

wobei

$$[v]_{\alpha,J} := \sup_{|s-t|>0, s,t\in J} \frac{|v(t)-v(s)|}{|t-s|^\alpha} < \infty\}, \quad [v]_\alpha := [v]_{\alpha,\mathbb{R}_+}, \quad \alpha \in (0,1)$$

und

$$\mathrm{BUC}^1_\alpha(\mathbb{R}_+;X) := \{v \in \mathrm{BUC}^0(\mathbb{R}_+;X) : v \text{ ist stetig differenzierbar mit } v' \in \mathrm{BUC}^0_\alpha(\mathbb{R}_+;X) \text{ und } [v']_\alpha < \infty\}.$$

Die obigen Räume werden zu Banachräumen mit den Normen

$$\|v\|_\alpha := \sup_{t\in J} |v(t)| + [v]_{\alpha,J}, \quad \|v\|_{1,\alpha} := \max_{j=0,1} \sup_{t\in J} |v^{(j)}(t)| + [v']_{\alpha,J},$$

d.h. $(\mathrm{BUC}_\alpha(\mathbb{R}_+;X), \|\cdot\|_\alpha)$ und $(\mathrm{BUC}^1_\alpha(\mathbb{R}_+;X), \|\cdot\|_{1,\alpha})$. Eine typische parabolische Regularität für u wäre

$$Z^\alpha(J) := \mathrm{BUC}^1_\alpha(J;X) \cap \mathrm{BUC}^0_\alpha(\mathbb{R}_+;X_A),$$

wobei $X_A = (\mathcal{D}(A), |\cdot|_{X_A})$ und $|\cdot|_A$ die Graphennorm bezeichnet. Im folgenden sei A ein sektorieller Operator mit Winkel $\phi_A < \pi/2$, also insbesonder Erzeuger einer beschränkten analytischen Halbgruppe $T \in \mathcal{S}(X, M', 0)$ und damit $|AT(t)| \leq M/t$ für $t > 0$. Für das folgende Theorem wird $f(0)$ vorausgesetzt, so dass wir folgende Zerlegung benutzen

$$f(t) = [f(t) - a(t)T(t)f(0)] + a(t)T(t)f(0) = g(t) + h(t).$$

Hier ist $a \in \mathrm{BUC}^\infty(\mathbb{R}_+)$ mit $a(0) = 1$, z.B. $a(t) = e^{-t}$. Weiterhin gilt nach Definition $g(0) = 0$ und $g \in \mathrm{BUC}^0_\alpha(\mathbb{R}_+;X)$. Wegen der Linearität der Gleichung zerlegen wir u in drei Anteile,

$$u(t) = u_0(t) + v(t) + w(t), \quad u_0(t) = T(t)x, \quad v(t) = \int_0^t T(t-s)g(s)\,ds,$$

und

$$w(t) = \int_0^t T(t-s)a(s)T(s)f(0)\,ds = \hat{a}(t)T(t)f(0), \quad \hat{a}(t) = \int_0^t a(s)\,ds.$$

Zuerst diskutieren wir die Regularität von u_0. Ist $x \in X$, so wissen wir

$$u_0 \in \mathrm{C}^\infty((0,\infty);X) \cap \mathrm{C}(\mathbb{R}_+;X), \quad u_0(t) \in \mathcal{D}_\infty(A), \quad \forall t > 0.$$

Damit u_0 mehr Regularität in $t = 0$ besitzt, d.h. mehr als $\mathrm{C}(\mathbb{R}_+;X)$, muss $x \in X$ etwas besser sein. Betrachte dazu

$$|u_0(t+h) - u_0(t)| = |T(t)[T(h) - I]x| \leq M'|T(h)x - x| = M'|u_0(h) - u_0(0)|,$$

für alle $t, h \geq 0$. Daher gilt $u_0 \in \mathrm{C}^\alpha([0,t_0];X)$ mit $t_0 > 0$ genau dann, wenn $u_0 \in \mathrm{BUC}^0_\alpha(\mathbb{R}_+;X)$ bzw. genau dann, wenn eine Konstante $c_\alpha(x) > 0$ existiert, so dass

$$|T(h)x - x| \leq c_\alpha(x)h^\alpha, \quad \forall h \geq 0.$$

Dies gibt Anlass zu folgender Definition.

Definition 7.1.1. *Sei A ein sektorieller Operator in einem Banachraum X mit Winkel $\phi_A < \pi/2$, und sei $\alpha \in (0,1)$. Der Raum $D_A(\alpha,\infty)$ ist definiert durch*

$$D_A(\alpha,\infty) = \{x \in X : [x]_{\alpha,\infty} := \sup_{h>0} h^{-\alpha}|T(h)x - x| < \infty\}.$$

Wird $D_A(\alpha,\infty)$ mit der Norm

$$|x|_{\alpha,\infty} = |x| + [x]_{\alpha,\infty}$$

versehen, so ist $D_A(\alpha,\infty)$ ein Banachraum. Ähnlich definiert man für $k \in \mathbb{N}$

$$D_A(k+\alpha,\infty) = \{x \in \mathcal{D}\left(A^k\right) : A^k x \in D_A(\alpha,\infty)\}.$$

Mit obigen Untersuchungen und den Abschätzungen

$$\begin{aligned}
\sup_{t\geq 0} |u_0(t)| &= \sup_{t\geq 0} |T(t)x| \leq M'|x|, \\
\sup_{t\geq 0} [u_0(t)]_{\alpha,\infty} &= \sup_{t\geq 0}\sup_{h>0} h^{-\alpha}|T(t+h)x - T(t)x| \\
&\leq M' \sup_{h>0} h^{-\alpha}|T(h)x - x| = M'[x]_{\alpha,\infty},
\end{aligned}$$

folgern wir

Proposition 7.1.1. *Sei A ein sektorieller Operator in einem Banachraum X mit Winkel $\phi_A < \pi/2$, sei $\alpha \in (0,1)$, und sei $J_0 = [0,t_0]$ mit einem $t_0 > 0$. Dann sind folgende Aussagen für die homogene Lösung $u_0 = T(t)x$ von (7.1) äquivalent*

- $u_0 \in \mathrm{C}^\alpha(J_0;X)$;
- $u_0 \in \mathrm{BUC}^0_\alpha(\mathbb{R}_+;X)$;
- $x \in D_A(\alpha,\infty)$.

Dann existiert ein $C_{\alpha,\infty}(A) > 0$ mit

$$|u_0|_{\mathrm{BUC}^0_\alpha(\mathbb{R}_+;X)} + \sup_{t\geq 0}|u_0(t)|_{\alpha,\infty} \leq C_{\alpha,\infty}|x|_{\alpha,\infty}.$$

Als Konsequenz erhalten wir weiter

$$u_0 \in \mathrm{BUC}^1_\alpha(\mathbb{R}_+;X) \quad \Leftrightarrow \quad u_0 \in \mathrm{BUC}_\alpha(\mathbb{R}_+;X_A)$$

bzw.

$$u_0 \in Z^\alpha(\mathbb{R}_+) \quad \Leftrightarrow \quad x \in D_A(1+\alpha,\infty).$$

Natürlich sind andere Charakterisierungen/Beschreibungen (Normen) des Banachraumes von Interesse, gerade in den Anwendungen für konkrete Operatoren A. Daher sei ohne Beweis die folgende Proposition erwähnt.

Proposition 7.1.2. *Sei A ein sektorieller Operator in einem Banachraum X mit Winkel $\phi_A < \pi/2$ und sei $\alpha \in (0,1)$. Dann sind folgende Aussagen für $x \in X$ äquivalent*

- $x \in D_A(\alpha,\infty)$;
- $[x]'_{\alpha,\infty} := \sup_{t>0} t^{1-\alpha}|AT(t)x| < \infty$;
- $[x]''_{\alpha,\infty} := \sup_{\lambda>0} \lambda^{\alpha}|A(\lambda+A)^{-1}x| < \infty$;
- $x \in (X, X_A)_{\alpha,\infty}$.

Hierbei bezeichnet $(X,Y)_{\theta,p}$ mit $\theta \in (0,1)$ und $p \in [0,\infty]$ die reelle Interpolation zwischen den Banachräumen X und Y der Ordnung θ und dem Exponenten p (Triebel).

Bemerkung 7.1.1. Es sei erwähnt, dass die obigen Propositionen auch im Falle der kleinen Hölderräume gültig sind, d.h. man ersetze $C^\alpha(J;X)$, $\mathrm{BUC}^0_\alpha(\mathbb{R}_+;X)$ durch

$$c^\alpha(J) := \{v \in \mathrm{C}^\alpha(J) : \lim_{0<|s-t|\to 0} \frac{|u(t)-u(s)|}{|t-s|} = 0\},$$
$$\mathrm{buc}^0_\alpha(\mathbb{R}_+) := \{v \in \mathrm{BUC}^0_\alpha(\mathbb{R}_+) : \lim_{0<|s-t|\to 0} \frac{|u(t)-u(s)|}{|t-s|} = 0\},$$

und $D_A(\alpha,\infty)$ durch

$$D_A(\alpha,0) := \{x \in D_A(\alpha,\infty) : \lim_{h\to+0} h^{-\alpha}|T(h)x - x| = 0\},$$

sowie in obiger Propostion $< \infty$ durch 0.

Zurück zu unserem Cauchy-Problem. Die Regularität von $w(t) = \hat{a}(t)T(t)f(0)$ sei kurz diskutiert, wobei zuerst nur $f(0) \in X$ gelte. Aufgrund von

$$w'(t) = a(t)T(t)f(0) + \hat{a}(t)AT(t)f(0),$$

und der Regularität/Eigenschaften der Funktion $\hat{a}$ sieht man sofort, dass

$$\sup_{t>0}|w(t)| \le M' \sup_{t>0}|\hat{a}(t)||f(0)|,$$
$$\sup_{t>0}|Aw(t)| + \sup_{t>0}|w'(t)| \le M' \sup_{t>0}|\hat{a}(t)||f(0)| + 2M \sup_{t>0}\frac{\hat{a}(t)}{t}|f(0)| < \infty,$$

da

$$|\hat{a}(t)AT(t)| \le M\frac{\hat{a}(t)}{t} \quad \text{und} \quad \lim_{t\to+0}\frac{\hat{a}(t)}{t} = \lim_{t\to+0}\frac{a(t)}{1} = 1.$$

Dies zeigt auch $w' \in \mathrm{C}(\mathbb{R}_+;X)$, also insbesondere die Stetigkeit in $t=0$. Um mehr Regularität für w zu bekommen, muss $f(0) \in X$ besser sein. So ist $w' \in \mathrm{BUC}^0_\alpha(\mathbb{R}_+;X)$, falls $f(0)$ in $D_A(\alpha,\infty)$ liegt. Aus obiger Ableitung findet man nämlich

$$[w']_\alpha \le M'\left([a]_\alpha + [\hat{a}]_\alpha\right) + M\left(\sup_{t\in\mathbb{R}_+}|a(t)| + \sup_{t\in\mathbb{R}_+}|\hat{a}(t)|\right)[f(0)]_{\alpha,\infty}.$$

Daher hat man für $f(0) \in D_A(\alpha,\infty)$ die Regularität $w \in Z^\alpha(\mathbb{R}_+)$. Als letztes beschäftigen wir uns mit der Regularität von v, wobei wir uns nur für kompakte Intervalle $J_0 = [0,t_0]$ interessieren. Es gilt nun

Theorem 7.1.1. *Sei A ein sektorieller Operator im Banachraum X mit Winkel $\phi_A < \pi/2$, $J_0 = [0,t_0]$ und $\alpha \in (0,1)$. g in ${}_0\mathrm{C}^\alpha(J_0;X) = \{h \in \mathrm{C}^\alpha(J_0;X) : h(0) = 0\}$, so ist $v = \int_0^t T(t-s)g(s)\,ds$ Lösung von (7.1) mit rechter Seite g, Anfangswert 0 und $v \in Z^\alpha(J_0)$.*

Proof. Als erstes sei bemerkt, dass

$$|v(t)| \le M' \int_0^t |g(s)|\,ds \le M' c_{\alpha,g} \int_0^t s^\alpha\,ds = M' c_{\alpha,g} \frac{t^\alpha}{1+\alpha}$$

und damit $v \in \mathrm{C}(J_0;X)$. Wir untersuchen nun $Av(t)$. Dafür zerlegen wir v gemäß

$$v(t) = v_1(t) + v_2(t) = \int_0^t T(t-s)[g(s)-g(t)]\,ds + \int_0^t T(t-s)g(t)\,ds.$$

Es gilt nun

$$Av_2(t) = \int_0^t AT(t-s)g(t)\,ds = [T(t)-I]g(t)$$

und somit ist $v_2(t)$ in $\mathcal{D}(A)$ für $t \ge 0$ und Av_2 stetig auf J_0. Für v_2 gilt ebenfalls $v_2(t) \in \mathcal{D}(A)$ für $t \ge 0$ und $Av_2 \in \mathrm{C}(J_0;X)$. Nach Theorem 2.4.1 ist v Lösung des inhomgenen Cauchy-Problems mit rechter Seite g. Nun zur C^α-Regularität. Es gilt für $s,t \in J_0$ mit $t = s+h$, $h > 0$

$$\begin{aligned}
\frac{|Av_2(t) - Av_2(s)|}{|t-s|^\alpha} &\le (1+M')[g]_{\alpha,J_0} + \frac{1}{h^\alpha}\Big|\int_s^{s+h} AT(\tau)g(s)\,d\tau\Big| \\
&\le (1+M')[g]_{\alpha,J_0} + \frac{1}{h^\alpha}[g]_{\alpha,J_0}\int_s^{s+h} \frac{M}{\tau}s^\alpha\,d\tau, \quad (g(0)=0) \\
&\le (1+M')[g]_{\alpha,J_0} + \frac{1}{h^\alpha}[g]_{\alpha,J_0} M \int_s^{s+h} \tau^{\alpha-1}\,d\tau \\
&= (1+M')[g]_{\alpha,J_0} + [g]_{\alpha,J_0}\frac{M}{\alpha}\frac{(s+h)^\alpha - s^\alpha}{h^\alpha} \le \cdots [g]_{\alpha,J_0}\frac{M}{\alpha}.
\end{aligned}$$

Es folgt eine ähnliche Rechnung für Av_1, wobei $Av_1(s+h) - Av_1(s)$ in drei Anteile zerlegt wird,

$$\begin{aligned}
Av_1(s+h) - Av_1(s) = &\int_0^s A[T(s+h-\tau) - T(s-\tau)](g(\tau)-g(s))\,d\tau + \\
&\int_0^s AT(s+h-\tau)[g(s) - g(s+h)]\,d\tau +
\end{aligned}$$

$$\int_s^{s+h} AT(s+h-\tau)(g(\tau)-g(s+h))\,d\tau$$
$$= v_{11}+v_{12}+v_{13}.$$

Abschätzung der einzelnen Terme ergibt

$$\begin{aligned}
|v_{11}| &= |\int_0^s \int_{s-\tau}^{s+h-\tau} A^2T(r)\,dr(g(\tau)-g(s))\,d\tau| \\
&\le 4M \int_0^s \int_{s-\tau}^{s+h-\tau} r^{-2}\,dr[g]_{\alpha,J_0}(s-\tau)^\alpha\,d\tau \\
&= 4M[g]_{\alpha,J_0}\int_0^s \frac{h}{(s-\tau)(s+h-\tau)}(s-\tau)^\alpha\,d\tau \le Ch^\alpha
\end{aligned}$$

und

$$|v_{12}| = |(T(s+h)-T(s))(g(s)-g(s+h))| \le 2M'[g]_{\alpha,J_0}h^\alpha,$$

sowie

$$\begin{aligned}
|v_{13}| &\le \int_s^{s+h} |AT(s+h-\tau)||g(\tau)-g(s+h)|\,d\tau \\
&\le M[g]_{\alpha,J_0}\int_s^{s+h} \frac{1}{s+h-\tau}(s+h-\tau)^\alpha\,d\tau \le Ch^\alpha.
\end{aligned}$$

Damit ist jeder Term v_{1j}, $j=1,2,3$, Hölder-stetig mit Exponent α. $\square$

7.2. Maximale L_2-Regularität in Hilberträumen

Als letztes studieren wir (7.1) für den Fall, dass X ein Hilbertraum ist und interessieren uns für L_2-Regularität bzgl. t. Im folgenden sei wieder A ein sektorieller Operator mit Winkel $\phi_A < \pi/2$, d.h. $-A$ ist Erzeuger einer beschränkten analytischen C_0-Halbgruppe. Schauen wir uns das inhomogene Problem (7.1) in $\mathrm{L}_2(\mathbb{R}_+;X)$ an, d.h. die rechte Seite f liegt in diesem Raum, taucht wieder die Frage auf, welche Regularität u besitzt. Ist umgekehrt $u \in \mathrm{H}_2^1(\mathbb{R}_+;X)$ und $Au(t) \in X$ für f.a. $t>0$, sowie $Au \in \mathrm{L}_2(\mathbb{R}_+;X)$, zusammengefasst

$$u \in Z_2(\mathbb{R}_+) = \mathrm{H}_2^1(\mathbb{R}_+;X) \cap \mathrm{L}_2(\mathbb{R}_+;X_A),$$

dann definiert die Gleichung (7.1) ein $f \in \mathrm{L}_2(\mathbb{R}_+;X)$. Diese Art von Regularität nennt man auch maximale Regularität in $\mathrm{L}_2(\mathbb{R}_+;X)$. Als erstes klären wir die Regularität von x, damit $u_0 := T(\cdot)x \in Z_2(\mathbb{R}_+)$. Dies können wir sogar allgemeiner klären, d.h. nicht nur für $p=2$ sondern für $p \in (1,\infty)$.

Angenommen $u_0 \in \mathrm{H}^1_{p,loc}(\mathbb{R}_+;X)$ und $u_0' \in \mathrm{L}_p(\mathbb{R}_+;X)$. Dann gilt aufgrund der Gleichung $Au_0 \in \mathrm{L}_p(\mathbb{R}_+;X)$ bzw. ausgeschrieben

$$\int_0^\infty |Au_0(t)|^p\,dt = \int_0^\infty |AT(t)x|^p\,dt < \infty.$$

Dies gibt wieder Anlass für die folgende Definition.

Definition 7.2.1. *Sei A ein sektorieller Operator im Banachraum X mit Spektralwinkel $\phi_A < \pi/2$. Weiterhin sei $\alpha \in (0,1)$ und $p \in [1,\infty)$. Die Räume $D_A(\alpha,p)$ sind definiert durch*

$$D_A(\alpha,p) = \{x \in X:\ [x]_{\alpha,p} := \left(\int_0^\infty |t^{1-\alpha}AT(t)x|^p\,\frac{dt}{t}\right)^{1/p} < \infty\}.$$

Ausgestattet mit der Norm

$$|x|_{\alpha,p} = |x| + [x]_{\alpha,p}, \quad x \in D_A(\alpha,p)$$

werden $D_A(\alpha,p)$ Banachräume. Für $k \in \mathbb{N}$ definiert man $D_A(k+\alpha,p)$ durch

$$D_A(k+\alpha,p) := \{x \in D(A^k):\ A^k x \in D_A(\alpha,p)\}.$$

Bevor wir uns mit obigem Regularitätsproblem beschäftigen, sollen folgende Charakterisierungen erwähnt werden.

Proposition 7.2.1. *Sei A ein sektorieller Operator in einem Banachraum X mit Spektralwinkel $\phi_A < \pi/2$. Weiterhin sei $\alpha \in (0,1)$ und $p \in [1,\infty)$. Dann sind folgende Aussagen für $x \in X$ äquivalent*

(i) $x \in D_A(\alpha,p)$;

(ii) $[x]'_{\alpha,p} := [\int_0^\infty |t^{1-\alpha}(T(t)x - x)|^p\,dt/t]^{1/p} < \infty$;

(iii) $[x]''_{\alpha,p} := [\int_0^\infty |\lambda^\alpha A(\lambda+A)^{-1}x|^p\,d\lambda/\lambda]^{1/p} < \infty$;

(iv) $x \in (X, X_A)_{\alpha,p}$.

Hierbei bezeichnet $(X,Y)_{\theta,p}$ die reelle Interpolation zwischen den Banachräumen X und Y der Ordnung θ und dem Exponenten p (Triebel). Die Normen $|\cdot|_{\alpha,p}$, $|\cdot|'_{\alpha,p} = |x| + [x]'_{\alpha,p}$, $|\cdot|''_{\alpha,p} = |x| + [x]''_{\alpha,p}$ und $|\cdot|_{(X,X_A)_{\alpha,p}}$ sind äquivalent.

Man sieht übrigens aufgrund der Voraussetzungen an T sofort, dass die Inklusion $\mathcal{D}(A) \subset D_A(\alpha,p) \subset X$ gilt. Denn sei $x \in \mathcal{D}(A)$ und $y = Ax \in X$, so haben wir

$$\left(\int_0^\infty |t^{1-\alpha}AT(t)x|^p\,\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_0^1 |t^{1-\alpha}AT(t)x|^p\,\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_1^\infty |t^{1-\alpha}AT(t)x|^p\,\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq M'|Ax| \left(\int_0^1 t^{(1-\alpha)p-1}\, dt \right)^{\frac{1}{p}} + M|x| \left(\int_1^\infty t^{-\alpha-1}\, dt \right)^{\frac{1}{p}}$$
$$< \infty.$$

Zurück zur Regularität der homogenen Lösung u_0.

Proposition 7.2.2. *Sei A ein sektorieller Operator im Banachraum X mit Spektralwinkel $\phi_A < \pi/2$ und $p \in (1, \infty)$. Dann sind folgende Aussagen für die homogene Lösung u_0 von (7.1) äquivalent*

(a) $u_0(t) \in \mathcal{D}(A)$ *für f.a.* $t > 0$ *und* $Au_0 \in \mathrm{L}_p(\mathbb{R}_+; X)$*;*

(b) $u_0 \in \mathrm{H}^1_{p,loc}(\mathbb{R}_+; X)$*;*

(c) $x \in D_A(1 - 1/p, p)$*.*

Ist dies der Fall, dann ist $u_0 \in \mathrm{BUC}^0(\mathbb{R}_+; D_A(1-1/p, p))$ und es existiert ein $C_{p,A} > 0$ mit

$$\|u_0'\|_{\mathrm{L}_p(\mathbb{R}_+;X)} + \|Au_0\|_{\mathrm{L}_p(\mathbb{R}_+;X)} + \sup_{t>0} |u_0(t)|_{1-1/p,p} \leq C_{p,A}|x|_{1-1/p,p}$$

für alle $x \in D_A(1 - 1/p, p)$. Ist A zusätzlich invertierbar, so gilt

$$\|u_0\|_{\mathrm{H}^1_p(\mathbb{R}_+;X)} + \|Au_0\|_{\mathrm{L}_p(\mathbb{R}_+;X)} + \sup_{t>0} |u_0(t)|_{1-1/p,p} \leq C_{p,A}|x|_{1-1/p,p}.$$

Proof. Beachte zunächst, dass $u_0 = T(t)x$ die Lösung des homogenen Problems ist, wobei A der Erzeuger der beschränkt analytischen Halbgruppe T ist. Damit gilt $T(t)X \subset \mathcal{D}(A)$ und $|AT(t)| \leq M/t$ für $t > 0$. Per Definition ist $u_0(t) \in \mathcal{D}(A)$ für $t > 0$, sowie

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}_+} |u_0'(t)|^p\, dt = \int_{\mathbb{R}_+} |Au_0(t)|^p\, dt &= \int_{\mathbb{R}_+} |AT(t)x|^p\, dt \\ &= \int_{\mathbb{R}_+} |t^{1-1/p}AT(t)x|^p \frac{dt}{t} = [x]_{1-1/p,p}.\end{aligned}$$

Daraus erkennen wir *(c)* $\Rightarrow$ *(a)*. Wegen $T'(t) = AT(t)$ und $|T(t)x| \leq M'|x|$, impliziert *(a)* $\Rightarrow$ *(b)*, denn

$$\|u_0\|^p_{\mathrm{H}^1_p([0,t_0];X)} = \int_0^{t_0} |T(t)x|^p\, dt + \int_0^{t_0} |Au_0(t)|^p\, dt \leq (M'|x|)^p t_0 + \|Au_0\|^p_{\mathrm{L}_p(\mathbb{R}_+;X)}$$

für alle $t_0 > 0$. Schliesslich ergibt *(b)* $Au_0 = -u_0' \in \mathrm{L}_p([0, 1]; X)$ und somit

$$[x]_{1-1/p,p} = \int_{\mathbb{R}_+} |AT(t)x|^p\, dt = \int_0^1 |u_0'(t)|^p\, dt + \int_1^\infty |AT(t)x|^p\, dt < \infty,$$

da

$$\int_1^\infty |AT(t)x|^p\,dt \le M^p \int_1^\infty t^{-p}\,dt|x|^p = (M|x|)^p/(p-1) < \infty,$$

d.h. *(b)* $\Rightarrow$ *(c)*. Die Halbgruppeneigenschaft und Beschränktheit von T ergibt

$$\sup_{t>0} |u_0(t)]_{1-1/p,p} \le M'|x|_{1-1/p,p}$$

sowie

$$|u_0(t+h) - u_0(t)|_{1-1/p,p} = |T(t)[T(h)x - x)|_{1-1/p,p} \le M'|T(h)x - x|_{1-1/p,p}.$$

Um nun die gleichmäßige Stetigkeit von u_0 im Banachraum $Y = D_A(1-1/p,p)$ zu zeigen, müssen wir die C_0-Eigenschaft von T in Y verifizieren. Beachte zuerst, dass $T(t)Y \subset Y$ gilt, also $\{T(t)\}_{t\ge 0} \subset \mathcal{B}(Y)$. Es gilt folgende Äquivalenz (ohne Beweis) für eine Halbgruppe auf einem Banachraum Y:

- $\lim_{h\to+0} T(h)y = y$ für alle $y \in Y$;
- T ist beschränkt auf einem kompakten Intervall $[0,\delta]$ und $\lim_{h\to+0} T(h)x = x$ für alle $x \in D$ mit $\overline{D} = Y$.

In unserem Fall wähle man einfach $D = \mathcal{D}(A)$, denn aufgrund der Inklusionen $\mathcal{D}(A) \subset D_A(\alpha,p) \subset X$ haben wir die Dichtheit. Weiterhin ist ja T beschränkt auf Y (siehe obige Ungleichung) und es gilt für $x \in \mathcal{D}(A)$, $y = Ax \in X$:

$$\begin{aligned}
[T(h)x - x]_{1-1/p,p} &\le \left(\int_0^1 |AT(t)[T(h)x - x]|^p\,dt\right)^{1/p} \\
&\quad + \left(\int_1^\infty |AT(t)[T(h)x - x]|^p\,dt\right)^{1/p} \\
&\le \left(\int_0^1 |AT(t)[T(h)x - x]|^p\,dt\right)^{1/p} \\
&\quad + M\left(\int_1^\infty t^{-p}\,dt\right)^{1/p} |T(h)x - x| \\
&\le M'|T(h)y - y| + \frac{M}{(p-1)^{1/p}}|T(h)x - x| \underset{h\to 0}{\to} 0,
\end{aligned}$$

da T die C_0-Eigenschaft in X besitzt. □

Nun wenden wir uns der inhomogenen Gleichung mit einem $0 \ne f \in \mathrm{L}_2(\mathbb{R}_+;X)$ zu, wobei X ein Hilbertraum ist. Da es uns nur um Regularitätsfragen geht, nehmen wir weiter an, dass $\omega < 0$ ist, also insbesondere A invertierbar.

Theorem 7.2.1. *Sei X ein Hilbertraum und A ein sektorieller, invertierbarer Operator mit Spektralwinkel $\phi_A < \pi/2$. Sei u die milde Lösung des obigen Cauchy-Problems. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

- $u \in Z_2(\mathbb{R}_+)$;
- $x \in \mathcal{D}_A(1/2,2)$ *und* $f \in \mathrm{L}_2(\mathbb{R}_+;X)$.

Ist dies der Fall, dann ist $u \in \mathrm{BUC}(\mathbb{R}_+;\mathcal{D}_A(1/2,2))$, *und es gibt eine Konstante* $C>0$, *die nur von* A *abhängt, so dass*

$$\|u\|_{\mathrm{H}_2^1(\mathbb{R}_+;X)} + \|Au\|_{\mathrm{L}_2(\mathbb{R}_+;X)} + \sup_{t>0} |u|_{1/2,2} \leq C\left([x]_{1/2,2} + \|f\|_{\mathrm{L}_2(\mathbb{R}_+;X)}\right), \tag{7.2}$$

für alle $x \in \mathcal{D}_A(1/2,2)$ *und* $f \in \mathrm{L}_2(\mathbb{R}_+;X)$, *d.h. der Operator* $\mathcal{L}v = (\partial_t v + Av, v(0))$ *ist ein Isomorphismus von* $Z_2(\mathbb{R}_+)$ *nach* $\mathrm{L}_2(\mathbb{R}_+;X) \times \mathcal{D}_A(1/2,2)$.

Proof. Regularität von v: Setze f und v auf $\mathbb{R}$ durch Null fort (Beachte, dass wir $v(0)=0$ haben. Dann betrachte zuerst $f \in \mathrm{C}_0^\infty(\mathbb{R};X)$. Fouriertransformation der Gleichung liefert nun

$$i\xi\hat{v}(\xi) + A\hat{v}(\xi) = \hat{f}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Die gleichmässige Beschränktheit von $\lambda(\lambda+A)^{-1}$ für $\lambda \in \Sigma_{\pi/2}$ impliziert dann

$$|i\xi\hat{v}(\xi)| + |A\hat{v}(\xi)| \leq C|\hat{f}(\xi)|, \quad \xi \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

mit einer Konstanten $C>0$, die nur von A abhängt, und der Satz von Plancherel ergibt schliesslich die Abschätzung (Einschränkung auf $\mathbb{R}_+$)

$$\|u'\|_{\mathrm{L}_2(\mathbb{R}_+;X)} + \|Au\|_{\mathrm{L}_2(\mathbb{R}_+;X)} \leq C\|f\|_{\mathrm{L}_2(\mathbb{R}_+;X)}.$$

Da $\mathrm{C}_0^\infty(\mathbb{R};X)$ dicht in $\mathrm{L}_2(\mathbb{R};X)$ ist, erhalten wir diese Ungleichung auch für beliebiges $f \in \mathrm{L}_2(\mathbb{R}_+;X)$. Die Invertierbarkeit von A liefert die Ungleichung (7.2) □

Bemerkung 7.2.1. Verzichtet man auf die Invertierbarkeit von A, so gilt für $x \in D_A(1/2,2)$ und $f \in \mathrm{L}_2(\mathbb{R}_+;X)$ nur:
$u \in \mathrm{H}^1_{2,loc}(\mathbb{R}_+,X) \cap \mathrm{L}_{2,loc}(\mathbb{R}_+;X_A)$ und die Abschätzungen

$$\|u'\|_{\mathrm{L}_2(\mathbb{R}_+;X)} + \|Au\|_{\mathrm{L}_2(\mathbb{R}_+;X)} + \sup_{t>0}[u(t)]_{1/2,2} \leq C\left([x]_{1/2,2} + \|f\|_{\mathrm{L}_2(\mathbb{R}_+;X)}\right),$$
$$\|u\|_{\mathrm{H}_2^1([0,a];X)} + \|Au\|_{\mathrm{L}_2([0,a];X)} + \sup_{t\in[0,a]}[u(t)]_{1/2,2} \leq C_a\left([x]_{1/2,2} + \|f\|_{\mathrm{L}_2([0,a];X)}\right)$$

für alle $a>0$.