Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Dr Matthias Kotschote
Matthias Sroczinski

21. April 2016

Parabolische Differentialgleichungen
1. Übungsblatt

Aufgabe 1.1 Sei $m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig und nach oben beschränkt. Sei $1 \leq p < \infty$ und $X := L^p(\mathbb{R}^n)$. Betrachte die Operatorfamilie $(T(t))_{t\geq 0}$, welche durch $(T(t)f)(x) := e^{tm(x)}f(x)$ für $f \in X$, $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^n$ definiert ist.

a) Zeige, dass $(T(t))_{t\geq 0}$ eine C_0-Halbgruppe auf X definiert.

b) Bestimme den Generator von $(T(t))_{t\geq 0}$.

c) In welchem Fall erhält man auch für $p = \infty$ eine C_0-Halbgruppe?

Aufgabe 1.2 Seien X, Y Banachräume und $(T_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset L(X, Y)$ eine beschränkte Folge in $L(X, Y)$. Es gebe eine dichte Teilmenge $D \subset X$ so, dass für alle $x \in D$ die Folge $(T_k x)_{k\in\mathbb{N}} \subset Y$ eine Cauchyfolge in Y ist. Zeige, dass genau ein $T \in L(X, Y)$ existiert, sodass $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ stark gegen T konvergiert und dass $\|T\|_{L(X,Y)} \leq \liminf_{k\to\infty} \|T_k\|_{L(X,Y)}$ gilt.

Aufgabe 1.3 Sei $1 \leq p < \infty$. Für $f \in L^p(\mathbb{R})$ und $t \geq 0$ definiere

$$(T(t)f)(x) := f(t + x).$$

Zeige, dass $(T(t))_{t\geq 0}$ eine C_0-Halbgruppe auf $L^p(\mathbb{R})$ definiert, deren Generator A durch $D(A) = W^1_p(\mathbb{R})$, $Af = \frac{d}{dx}f$ $(f \in W^1_p(\mathbb{R}))$ gegeben ist. (Hierbei ist die Ableitung im distributionellen Sinne gemeint.)

Hinweis: Verwende Aufgabe 1.2, um die starke Stetigkeit zu zeigen. Benutze ohne Beweis, dass für $f \in W^1_p(\mathbb{R})$ der Grenzwert $\lim_{t\to 0} \frac{f(\cdot+t)-f(\cdot)}{t}$ in $L^p(\mathbb{R})$ existiert und gleich $\frac{d}{dx}f$ ist.