

3. Mai 2016

Parabolische Differentialgleichungen 2. Übungsblatt

Im folgenden sei stets $(T(t))_{t \geq 0}$ eine C_0 -Halbgruppe auf einem Banachraum X mit Generator $A : D(A) \subset X \rightarrow X$. Folgende Resultate können zur Lösung der Aufgaben ohne Beweis verwendet werden:

1. Für $f \in C(\mathbb{R}_+, X)$ gilt $\lim_{h \rightarrow 0} \int_t^{t+h} f(s) ds = f(t)$.
2. Für $f \in C^1(\mathbb{R}_+, X)$ gilt $f(t) = f(0) + \int_0^t f'(s) ds$.

Aufgabe 2.1 Zeige:

- a) Für alle $x \in X$, $t \geq 0$ gilt $\int_0^t T(s)x ds \in D(A)$ und

$$T(t)x = x + A \int_0^t T(s)x ds.$$

- b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \in D(A^n)$ gilt

$$T(t)x = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{t^j}{(j)!} A^j x + \int_0^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!} T(s) A^n x ds \quad (t \geq 0).$$

Aufgabe 2.2 Zeige:

- a) Existiert ein $M > 0$ mit $\|T(t)\|_{L(X)} \leq M$ für alle $t \geq 0$, so ist

$$\|Ax\|_X^2 \leq 4M^2 \|A^2 x\|_X \|x\|_X \quad (x \in D(A^2)).$$

Hinweis: Verwende die Gleichung aus Aufgabe 2.1 b) für $n = 2$.

- b) Für $u \in W_p^2(\mathbb{R})$ ($p \in [1, \infty)$) und $\varepsilon > 0$ gilt die folgende Interpolationsungleichung:

$$\|u'\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq \frac{1}{\varepsilon} \|u\|_{L^p(\mathbb{R})} + \varepsilon \|u''\|_{L^p(\mathbb{R})}.$$

Hinweis: Benutze Aufgabe 1.3.

Aufgabe 2.3 Beweise, dass $A \in L(X)$ genau dann gilt, falls

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|T(t) - I\|_{L(X)} = 0. \quad (1)$$

Hinweis: Zeige zunächst (etwa unter Verwendung der Neumannschen Reihe), dass der Operator $\frac{1}{t} \int_0^t T(s) ds$ für hinreichend kleine $t > 0$ invertierbar ist, falls (1) gilt.

Aufgabe 2.4 Zeige:

- a) Für $\alpha \in \mathbb{C}$ ist $S(t) = \exp(-\alpha t)T(t)$ eine C_0 -Halbgruppe mit Erzeuger $A - \alpha I$.
- b) Für $\beta > 0$ ist $S(t) = T(\beta t)$ eine C_0 -Halbgruppe mit Erzeuger βA .