Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Dr Matthias Kotschote
Matthias Sroczinski

17. Mai 2016

Parabolische Differentialgleichungen
3. Übungsblatt

Aufgabe 3.1

a) Zeige die Abgeschlossenheit des Operators $\frac{d}{dx}$ in $C([0,1])$ mit dem Definitionsbereich $D\left(\frac{d}{dx}\right) := C^1([0,1])$.

b) Sei X ein Banachraum und $A : D(A) \subset X \to X$ ein linearer Operator. Beweise: Ist $\varrho(A) \neq \emptyset$, dann ist A abgeschlossen.

c) Gilt in b) auch die Umkehrung? Gib einen Beweis oder ein Gegenbeispiel für Deine Behauptung an.

Aufgabe 3.2 Sei X ein Banachraum und $A : D(A) \subset X \to X$ ein linearer abgeschlossener Operator mit $\overline{D(A)} = X$.

a) Für $\lambda_0 \in \varrho(A)$ gilt

$$\left\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - \lambda_0| < \|(A - \lambda_0)^{-1}\|^{-1}\right\} \subset \varrho(A).$$

b) Ist $A \in \mathcal{PS}(X)$, dann existiert ein $\varphi \in (0, \pi]$, so dass $\varrho(-A) \supset \Sigma_\varphi$ und

$$\sup\{|\lambda(\lambda + A)^{-1}| : \lambda \in \Sigma_\varphi\} < \infty.$$

Wobei $\Sigma_\varphi = \{z \in \mathbb{C} \setminus 0 : |\arg(z)| < \varphi\}$.

Hinweis: Finde eine Bedingung an φ, indem Du a) auf $\lambda_0 = t \in (0, \infty)$ und $\lambda = r\exp(i\varphi)$ anwendest.

Aufgabe 3.3

a) Eine Funktion $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ heißt subadditiv, falls $f(s+t) \leq f(s) + f(t)$ $(s, t \in \mathbb{R}_+)$. Zeige: Ist $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ subadditiv für alle $t > 0$ auf $[0, t]$ von oben beschränkt, dann gilt

$$\inf_{t>0} \frac{f(t)}{t} = \lim_{t\to\infty} \frac{f(t)}{t} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}.$$

b) Sei X ein Banachraum und $(T(t))_{t\geq 0}) \subset L(X)$ eine C_0-Halbgruppe. Dann nennt man $\omega_0(T) := \inf_{t>0} t^{-1} \log(\|T(t)\|)$ den Typ (oder die Wachstumsschranke) von T. Zeige

$$\omega_0(T) = \lim_{t\to\infty} \frac{\log(\|T(t)\|)}{t}$$

und für alle $\omega > \omega_0$ existiert ein $M(\omega) \geq 1$, so dass

$$\|T(t)\| \leq M(\omega)\exp(\omega t) \quad (t \geq 0).$$