Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Dr Matthias Kotschote
Matthias Sroczinski

2. Juni 2016

Parabolische Differentialgleichungen
4. Übungsblatt

Zunächst einige einleitende Bemerkungen:

Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt. Dann bezeichnet $M(K)$ den Raum aller endlichen signierten Borel-Maße auf K. Das heißt $\mu \in M(K)$ ist äquivalent zu $\mu = \mu_+ - \mu_-$, wobei $\mu_+, \mu_- : \mathcal{B}(K) \to [0, \infty)$ positive Maße mit $\mu_+(K), \mu_-(K) < \infty$ sind. Definiert man für $\mu = \mu_+ - \mu_-$

$$\|\mu\| := \mu_+(K) + \mu_-(K),$$

dann ist $\|\cdot\|$ eine Norm auf $M(K)$ und $(M(K), \|\cdot\|)$ ist ein Banachraum.

Weiter bezeichne $C(K)$ den Raum aller stetigen reellwertigen Funktionen $f : K \to \mathbb{R}$, versehen mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$. Dann ist $C(K)'$ isometrisch isomorph zu $M(K)$.

Aufgabe 4.1 Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und $f \in C(K)$. Zeige

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f) = \{\mu = \mu_+ - \mu_- \in M(K) :\\ \mu_-(\{f > 0\}) = \mu_+(\{f < 0\} = (\mu_+ + \mu_-)(\{|f| \neq \|f\|_\infty\}) = 0,\ \|\mu\| = \|f\|_\infty\}.\end{aligned}$$

.

Aufgabe 4.2 Sei X ein Banachraum. Zeige dass X genau dann ein Hilbertraum ist (d.h. es lässt sich ein Skalarprodukt definieren, das die Norm auf X induziert), falls es zu jedem $x \in X$ genau ein $x' \in X'$ mit $\mathcal{F}(x) = \{x'\}$ gibt und die Abbildung $x \mapsto x'$ $(X \to X')$ konjungiert linear ist.

Aufgabe 4.3 Sei X ein Banachraum mit strikt konvexem Dualraum X', das heißt

$$\forall x, y \in X',\ x \neq y,\ \|x\|_{X'} = \|y\|_{X'} = 1 \quad : \quad \frac{\|x + y\|_{X'}}{2} < 1.$$

Zeige, dass dann $\mathcal{F}(x)$ nur ein Element enthält für jedes $x \in X$.

Aufgabe 4.4 Sei X ein Banachraum und $A \in \mathcal{PS}(X)$. Dann gilt schon $X = \overline{\mathcal{N}(A) + \mathcal{R}(A)}$. Zeige

$$\overline{N(A) + R(A)} = N(A) + \overline{R(A)}.$$