

Universität Konstanz
 Fachbereich Mathematik und Statistik
 DR. MATTHIAS KOTSCHOTE
 MATTHIAS SROCZINSKI

15. Juni 2016

Parabolische Differentialgleichungen

5. Übungsblatt

Aufgabe 5.1 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet. Betrachte den Operator $A = \Delta$ auf $L^p(\Omega)$ für $1 < p < \infty$. Zeige:

- a) Für $D(A) = C_0^\infty(\Omega)$ ist A dissipativ, d.h. $\omega = 0$.
- b) Habe Ω einen C^1 -Rand. Seien $\alpha, \beta \in L^\infty(\partial\Omega)$ mit $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ und $\alpha \cdot \beta \geq 0$ auf $\partial\Omega$. Dann ist für

$$D(A) = \left\{ u \in C^2(\Omega) : \alpha \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} + \beta u = 0 \text{ auf } \partial\Omega \right\}$$

A dissipativ (dabei steht $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}$ für die Normalenableitung auf dem Rand).

Aufgabe 5.2 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet. Betrachte den Operator $A = \Delta$ auf $C_0(\Omega) = \{u \in C(\Omega) : u = 0 \text{ auf } \partial\Omega\}$ mit Definitionsbereich $D(A) = C_0^\infty(\Omega)$. Zeige, dass A dissipativ ist.

Hinweis: Sei $u \in D(A)$. Zeige durch Wahl eines geeigneten Maßes in $\mathcal{F}(u)$ zunächst, dass $(Au, u)_- \leq \Delta u(x_0)u(x_0)$ für $x_0 = \operatorname{argmax}_{x \in \Omega} |u(x)|$.

Aufgabe 5.3 Betrachte auf $L^p(\mathbb{R}^n)$ ($1 < p < \infty$) den Operator $A = \Delta$ mit $D(A) = C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Zeige $\bar{A} \in \mathcal{G}(L^p(\mathbb{R}^n), 1, 0)$.

Hinweis: Zeige zunächst $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset D(\bar{A})$.