Fachbereich Mathematik und Statistik
Jun.-Prof. Dr. Arno Fehm
Lothar Sebastian Krapp
WS 2015 / 2016

Übungen zur Vorlesung Algebra (B3)

Blatt 1
Polynomringe

Sei R stets ein Ring.

Aufgabe 1
(4 Punkte)
Sei $R[X_i : i \in I]$ der Polynomring über R in den Variablen X_i für eine beliebige Indexmenge I. Für ein Polynom $f \in R[X_i : i \in I]$ bezeichne $\deg(f)$ den *Totalgrad* von f, der wie folgt definiert ist:
Für $f = \sum_\mu a_\mu X^\mu$ mit $X^\mu = \prod_{i\in I} X_i^{\mu_i}$ sei

$$\deg(f) := \max \left\{ \sum_{i\in I} \mu_i : \mu \in \mathbb{N}_0^{(I)} \text{ mit } a_\mu \neq 0 \right\}.$$

Zeigen Sie:

i) Die Eigenschaften aus Lemma 1.2 der Vorlesung gelten auch für den Totalgrad.

   Hinweis für (c): Seien $X_{i_1}, \ldots, X_{i_k}$ die in f und g auftretenden Variablen. Schreiben Sie die Summe der Monome $X_{i_1}^{s_1} \cdot \ldots \cdot X_{i_k}^{s_k}$ höchsten Totalgrades in f und g in der Reihenfolge gegeben durch die lexikographische Ordnung auf ihren Exponenten $(s_1, \ldots, s_k)$.

ii) Wenn R nullteilerfrei ist, so ist auch $R[X_i : i \in I]$ nullteilerfrei.

Aufgabe 2
(4 Punkte)

a) Formulieren und beweisen Sie die universelle Eigenschaft des Polynomrings in n Variablen $R[X_1, \ldots, X_n] := R[X_i : i \in \{1, \ldots, n\}]$ in Analogie zu Satz 1.4 der Vorlesung.

b) Zeigen Sie, dass $R[X_1, \ldots, X_{n+1}] \cong R[X_1, \ldots, X_n][X_{n+1}]$.

Aufgabe 3
(4 Punkte)
Sei $f = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in R[X]$. Wir definieren die *formale Ableitung* $f' \in R[X]$ von f als

$$f' = \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1}.$$

Welche der folgenden Mengen I_k sind Ideale von $\mathbb{R}[X]$?

i) $I_1 = \{f \in \mathbb{R}[X] \mid f(2) = 0\}$

ii) $I_2 = \{f \in \mathbb{R}[X] \mid f'(2) = 0\}$

iii) $I_3 = \{f \in \mathbb{R}[X] \mid f(2) = f(3) = 0\}$

iv) $I_4 = \{f \in \mathbb{R}[X] \mid f(1) = f'(1) = 0\}$

Finden Sie für die I_k, welche Ideale von $\mathbb{R}[X]$ sind, ein Polynom $f_k \in \mathbb{R}[X]$, das I_k erzeugt.
Erinnerung: $\mathbb{R}[X]$ *ist ein Hauptidealring und faktoriell.*

Aufgabe 4
(4 Punkte)
Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}[X]/(X^2 - 1) \cong \mathbb{Q}^2$.

Abgabe: Montag, 02. November 2015, 10:00 Uhr, Briefkästen auf F4.