Fachbereich Mathematik und Statistik
Jun.-Prof. Dr. Arno Fehm
Lothar Sebastian Krapp
WS 2015 / 2016

Übungen zur Vorlesung Algebra (B3)

Blatt 2
Ideale, Ringe von Brüchen und faktorielle Ringe

Sei R stets ein Ring.

Aufgabe 5
(4 Punkte)
Sei $S \subset R$ eine multiplikative Teilmenge mit $0 \notin S$. Beweisen Sie:

a) Es gibt ein Ideal $I \trianglelefteq R$, das maximal ist mit der Eigenschaft $I \cap S = \emptyset$.
(Hinweis: Vergleiche Satz 2.15 aus der Vorlesung.)

b) Jedes solche I ist prim.

Aufgabe 6
(4 Punkte)
Seien R nullteilerfrei und $S \subseteq R$ eine multiplikative Teilmenge mit $0 \notin S$. Bezeichne $\iota : R \to S^{-1}R$ die in Korollar 3.6 definierte Einbettung. Wir identifizieren R mit $\iota(R)$, sodass wir $R \subseteq S^{-1}R$ schreiben können. Zeigen Sie:

a) Ist I ein Ideal von R, so ist $e(I) := S^{-1}I = \left\{\frac{a}{s} : a \in I, s \in S\right\}$ ein Ideal von $S^{-1}R$.

b) Ist J ein Ideal von $S^{-1}R$, so ist $c(J) := J \cap R$ ein Ideal von R.

c) Für $J \trianglelefteq S^{-1}R$ gilt $e(c(J)) = J$.

d) $J \trianglelefteq S^{-1}R$ ist genau dann prim, wenn $c(J) \trianglelefteq R$ prim ist.

Aufgabe 7
(4 Punkte)
Zeigen Sie: Ist $R[X]$ ein Hauptidealring, so ist R ein Körper.

Aufgabe 8
(4 Punkte)
Seien R faktoriell, P ein Vertretersystem der Primelemente von R modulo Assoziiertheit, $p \in P$ und $K = \mathrm{Quot}(R)$.

a) Zeigen Sie, dass die p-adische Bewertung auf K für alle $r \in R^\times$ und für alle $x, y \in K^\times$ folgende Eigenschaften hat:

   i) $v_p(rx) = v_p(x)$;

   ii) $v_p(-x) = v_p(x)$;

   iii) $v_p(x) \neq v_p(y)$ impliziert $v_p(x + y) = \min\{v_p(x), v_p(y)\}$;

b) Sei nun $R = \mathbb{Z}$. Zeigen Sie, dass $\{a \in \mathbb{Q} : v_p(a) \geq 0\} = \mathbb{Z}_{(p)}$.

Abgabe: Montag, 09. November 2015, 10:00 Uhr, Briefkästen auf F4.