Fachbereich Mathematik und Statistik
Jun.-Prof. Dr. Arno Fehm
Lothar Sebastian Krapp
WS 2015 / 2016

Universität Konstanz

Übungen zur Vorlesung Algebra (B3)

Blatt 3
Satz von Gauß und Irreduzibilitätskriterien

Aufgabe 9
(4 Punkte)
Zeigen Sie mit so wenig Rechenaufwand wie möglich, dass folgende Polynome irreduzibel sind:

a) $X^3 + 39X^2 - 4X + 8$ in $\mathbb{Q}[X]$;

b) $2X^4 + 200X^3 + 2000X^2 + 20000X + 20$ in $\mathbb{Q}[X]$;

c) $X^5 - 64$ in $\mathbb{Q}[X]$;

d) $X^2Y + XY^2 - X - Y + 1$ in $\mathbb{Q}[X, Y]$.

Aufgabe 10
(4 Punkte)
Sei $f = 29X^5 - 13X^4 - 44X^3 + 18X^2 + 35X + 10 \in \mathbb{Z}[X]$.

a) Erstellen Sie eine Liste der irreduziblen Polynome vom Grad ≤ 2 in $\mathbb{F}_2[X]$ und $\mathbb{F}_3[X]$.

b) Zerlegen Sie f in $\mathbb{F}_2[X]$ und $\mathbb{F}_3[X]$ in seine irreduziblen Faktoren.

c) Folgern Sie, dass f irreduzibel über $\mathbb{Z}$ und über $\mathbb{Q}$ ist.

Aufgabe 11
(4 Punkte)

a) Zeigen Sie: Das Polynom $X^4 - p$ mit $p \in \mathbb{N}$ prim ist reduzibel in $\mathbb{R}[X]$, aber irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$.

b) Finden Sie die Primfaktorzerlegung von $X^{2n} + 2X^n + 1$ in $\mathbb{R}[X]$ für $n = 2$ und $n = 3$.

c) Finden Sie die Primfaktorzerlegung von $X^4 + 1$ in $\mathbb{R}[X]$ und in $\mathbb{Q}[X]$.
Hinweis: $X^4 + 1 = X^4 + 1 + 2X^2 - 2X^2$.

Aufgabe 12
(4 Punkte)
Sei R ein faktorieller Ring. Zeigen Sie: Ein Polynom $f \in R[X]$ mit $\deg(f) \geq 1$ ist genau dann irreduzibel in $R[X]$, wenn f für jedes Primelement $p \in R$ in $R_{(p)}[X]$ irreduzibel ist.

Hinweis: Überlegen Sie sich zunächst, dass $p \notin \left(R_{(p)}\right)^{\times}$.

Abgabe: Montag, 16. November 2015, 10:00 Uhr, Briefkästen auf F4.