Fachbereich Mathematik und Statistik
Jun.-Prof. Dr. Arno Fehm
Lothar Sebastian Krapp
WS 2015 / 2016

Universität Konstanz

Übungen zur Vorlesung Algebra (B3)

Blatt 4
Endliche Körpererweiterungen

Aufgabe 13
(4 Punkte)
Sei $L|K$ eine endliche Körpererweiterung

a) Sei $[L : K] = p$ prim. Zeigen Sie: Für jedes $\alpha \in L \setminus K$ gilt $L = K(\alpha)$.

b) Sei $[L : K] = 2^k$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Sei $f \in K[X]$ ein Polynom mit $\deg(f) = 3$, welches in L eine Nullstelle hat. Zeigen Sie, dass f bereits eine Nullstelle in K hat.

Aufgabe 14
(4 Punkte)
Sei $\alpha \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von $f = X^3 - 2X + 2$, und sei $\beta := \alpha^2 + 1$.

a) Zeigen Sie: f ist irreduzibel über $\mathbb{Q}$, und $\mathbb{Q}(\alpha) = \mathbb{Q}(\beta)$.

b) Bestimmen Sie das Minimalpolynom von β über $\mathbb{Q}$.

c) Schreiben Sie α^{-1} und β^{-1} als $\mathbb{Q}$-Linearkombination von $1, \alpha, \alpha^2$.

Aufgabe 15
(4 Punkte)
Seien $L|K$ eine Körpererweiterung und $\alpha \in L$ transzendent über K. Zeigen Sie: Für $n \in \mathbb{N}$ ist α^n transzendent über K, und es gilt $[K(\alpha) : K(\alpha^n)] = n$.

Aufgabe 16
(4 Punkte)
Seien K ein Körper und $a, b \in K$. Sei L eine Körpererweiterung von K mit der Eigenschaft, dass $X^2 - a$ und $X^2 - b$ eine Wurzel $\sqrt{a}$ bzw. $\sqrt{b}$ in L besitzen. Zeigen Sie:

a) Ist $a \neq x^2$ für alle $x \in K$, so sind $[K(\sqrt{a}) : K] = 2$ und $K(\sqrt{a}) = \{x + y\sqrt{a} : x, y \in K\}$.

b) $K(\sqrt{a}, \sqrt{b}) = K(\sqrt{a} + \sqrt{b})$

c) Sind $a, b \in K^\times$, so gilt: $K(\sqrt{a}) = K(\sqrt{b}) \iff \exists u \in K^\times$ mit $a = u^2 b$.

d) Ist $\operatorname{char}(K) \neq 2$ und $F|K$ eine Körpererweiterung mit $[F : K] = 2$, so gibt es ein $\alpha \in F$ mit $F = K(\alpha)$ und $\alpha^2 \in K$.

Abgabe: Montag, 23. November 2015, 10:00 Uhr, Briefkästen auf F4.