Fachbereich Mathematik und Statistik
Jun.-Prof. Dr. Arno Fehm
Lothar Sebastian Krapp
WS 2015 / 2016

Übungen zur Vorlesung Algebra (B3)

Blatt 5
Zerfällungskörper und algebraischer Abschluss

Aufgabe 17
(4 Punkte)
Sei $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl und sei L der Zerfällungskörper von $f = X^3 - 2$ über $\mathbb{F}_p$. Bestimmen Sie den Grad $[L : \mathbb{F}_p]$ für die Fälle $p = 2, 3, 5, 7, 11$.

Aufgabe 18
(4 Punkte)
Sei $L \subseteq \mathbb{C}$ der Zerfällungskörper von $X^5 - 7 \in \mathbb{Q}[X]$ über $\mathbb{Q}$. Geben Sie zwei Elemente $\alpha, \beta \in L$ mit der Eigenschaft $\mathbb{Q}(\alpha, \beta) = L$ an, und bestimmen Sie den Grad der Körpererweiterung $[L : \mathbb{Q}]$.

Aufgabe 19
(4 Punkte)
Zeigen Sie:

a) Jeder algebraisch abgeschlossene Körper besitzt unendlich viele Elemente.

b) Sei $\mathbb{F}$ ein Primkörper. Dann ist $[\bar{\mathbb{F}} : \mathbb{F}] = \infty$.

c) Sei $L := \bigcup_{i=0}^{\infty} L_i$ die in dem Beweis von Theorem 4.7 konstruierte Körpererweiterung von K. Dann ist L eine algebraische Erweiterung von K.

Aufgabe 20
(4 Punkte)
Sei K ein Körper und $f \in K[X]$ ein Polynom mit $\deg(f) = n > 0$. Sei L der Zerfällungskörper von f über K. Zeigen Sie:

a) $[L : K]$ ist ein Teiler von $n!$.

Hinweis: Der Binomialkoeffizient $\binom{a}{b}$ ist für beliebige $a, b \in \mathbb{N}$ immer eine natürliche Zahl.

b) Ist $[L : K] = n!$, so ist f irreduzibel.

Abgabe: Montag, 30. November 2015, 10:00 Uhr, Briefkästen auf F4.