Fachbereich Mathematik und Statistik
Jun.-Prof. Dr. Arno Fehm
Lothar Sebastian Krapp
WS 2015 / 2016

Übungen zur Vorlesung Algebra (B3)

Blatt 6
Formale Ableitung und Separabilität

Aufgabe 21
(4 Punkte)
Sei K ein Körper. Für $f \in K[X]$ bezeichne f' die formale Ableitung von f. Beweisen Sie die Produkt- und die Kettenregel für formale Ableitungen aus Lemma 5.4, d.h. zeigen Sie, dass für alle $f, g \in K[X]$ gilt:

i) $(fg)' = f'g + g'f$

ii) $(f(g(X)))' = f'(g(X)) \cdot g'(X)$

Hinweis für ii): Zeigen Sie zunächst per Induktion, dass für alle $h \in K[X]$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt: $(h^n)' = nh^{n-1} \cdot h'$.

Aufgabe 22
(4 Punkte)
Sei K ein Körper mit $\mathrm{char}(K) = p > 0$, sei $a \in K$ und sei $f = X^p - X + a$. Zeigen Sie:

a) $f(X) = f(X + 1)$

b) f ist separabel.

c) Ist $\alpha \in \overline{K}$ eine Nullstelle von f, so ist $K(\alpha)$ der Zerfällungskörper von f.

d) Hat f keine Nullstelle in K, so ist f irreduzibel über K.

Aufgabe 23
(4 Punkte)
Sei K ein Körper mit $\mathrm{char}(K) = p > 0$ und sei $L|K$ eine algebraische Körpererweiterung.

a) Zeigen Sie: Ist K vollkommen, so ist auch L vollkommen.

b) Sei $L|K$ endlich und sei L vollkommen. Zeigen Sie, dass $[L^p : K^p] = [L : K]$, und folgern Sie, dass auch K vollkommen ist.

Aufgabe 24
(4 Punkte)
Sei R ein euklidischer Ring mit euklidischer Gradfunktion $\delta : R \setminus \{0\} \to \mathbb{N}_0$. Der *euklidische Algorithmus* über R angewandt auf $a, b \in R$ mit $\delta(a) \geq \delta(b)$ ist wie folgt definiert:

1. Setze $r_{-1} = a$ und $r_0 = b$.
2. Iterativer Schritt: Für $k \geq 0$: Finde $q_{k+1}, r_{k+1} \in R$ mit $r_{k-1} = q_{k+1}r_k + r_{k+1}$ und $\delta(r_{k+1}) < \delta(r_k)$ oder $r_{k+1} = 0$.
3. Beende den Algorithmus nach Schritt n, sobald $r_{n+1} = 0$.

Wir bezeichnen den (bis auf Einheiten eindeutig bestimmten) größten gemeinsamen Teiler von a und b in R mit $\mathrm{ggT}_R(a, b)$.

a) Erklären Sie, warum der Algorithmus nach endlich vielen Schritten endet, und zeigen Sie, dass $r_n = \mathrm{ggT}_R(a, b)$ gilt.

b) Sei K ein Körper und sei L eine Körpererweiterung von K. Folgern Sie, dass für alle $f, g \in K[X]$ gilt: $\mathrm{ggT}_{K[X]}(f, g) \sim \mathrm{ggT}_{L[X]}(f, g)$.

Abgabe: Montag, 07. Dezember 2015, 10:00 Uhr, Briefkästen auf F4.