Fachbereich Mathematik und Statistik
Jun.-Prof. Dr. Arno Fehm
Lothar Sebastian Krapp
WS 2015 / 2016

Universität Konstanz

Übungen zur Vorlesung Algebra (B3)

Blatt 7
Inseparabilität und Satz vom primitiven Element

Aufgabe 25
(4 Punkte)

a) Sei $L|K$ eine Körpererweiterung und seien $\alpha, \beta \in L^\times$. Seien $m, n \in \mathbb{N}$ zwei teilerfremde Zahlen mit der Eigenschaft, dass $\alpha^m \in K$ und $\beta^n \in K$. Zeigen Sie, dass $\alpha\beta$ ein primitives Element von $K(\alpha, \beta)|K$ ist.

b) Sei $\zeta_3 = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/3} \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie anhand der Konstruktion im Beweis von Theorem 7.4, dass $\sqrt[3]{2} + \zeta_3$ ein primitives Element von $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \zeta_3)|\mathbb{Q}$ ist.

Aufgabe 26
(4 Punkte)

Sei $p \in \mathbb{N}$ prim, sei $L = \mathbb{F}_p(t, s)$ der rationale Funktionenkörper in den Variablen t und s über $\mathbb{F}_p$ (siehe Beispiel 7.7) und sei $K = L^p$. Zeigen Sie:

a) $K = \mathbb{F}_p(t^p, s^p)$

b) $[L : K] = p^2$

c) Die Erweiterung $L|K$ ist nicht einfach.

d) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $p \nmid n$ sei $K_n = K(t + s^n)$. Dann ist für jedes n der Körper K_n ein Zwischenkörper von $L|K$ mit $K_n \neq L$, und es ist $K_n \neq K_m$ für $n \neq m$.

Aufgabe 27
(4 Punkte)

Sei K ein unendlicher Körper.

a) Sei V ein Vektorraum über K. Zeigen Sie, dass V nicht die Vereinigung endlich vieler echter Untervektorräume ist.

b) Sei $L|K$ eine endliche Erweiterung. Sei die Menge $\mathcal{M} = \{M : K \subseteq M \subseteq L\}$ der Zwischenkörper endlich und sei $\mathcal{M} \setminus \{L\} = \{M_1, \ldots, M_n\}$. Zeigen Sie, dass für

$$U := \bigcup_{i=1}^{n} M_i$$

gilt: $L \neq U$. Folgern Sie, dass für jedes $\alpha \in L \setminus U$ gilt: $K(\alpha) = L$.

Aufgabe 28
(4 Punkte)
Sei K ein Körper. Sei $L|K$ eine algebraische Körpererweiterung. Ein Element $\alpha \in L$ ist *rein inseparabel* über K, wenn $\mathrm{MinPol}(\alpha|K)$ nur eine Nullstelle in $\overline{K}$ besitzt.

a) Seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in L$ rein inseparabel über K. Zeigen Sie: Ist $L = K(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$, so ist $L|K$ rein inseparabel.

b) Sei
$$L_i := \{\alpha \in L : \alpha \text{ ist rein inseparabel über } K\}.$$
Zeigen Sie:

   i) L_i ist ein Zwischenkörper von $K \subseteq L$ und rein inseparabel über K.

   ii) Sei $L = \overline{K}$. Dann ist L_i ein vollkommener Körper.

Abgabe: Montag, 14. Dezember 2015, 10:00 Uhr, Briefkästen auf F4.