Fachbereich Mathematik und Statistik
Jun.-Prof. Dr. Arno Fehm
Lothar Sebastian Krapp
WS 2015 / 2016

Universität Konstanz

Übungen zur Vorlesung Algebra (B3)

Blatt 8
Ordnung von Gruppen und Normalteiler

Sei G stets eine Gruppe.

Aufgabe 29
(4 Punkte)
Wir definieren $\exp(G)$, den *Exponenten von G*, durch

$$\exp(G) := \inf \{n \in \mathbb{N} \mid \forall g \in G : g^n = 1\} .$$

a) Sei $\exp(G) < \infty$. Zeigen Sie, dass für alle $g \in G$ gilt: $\operatorname{ord}(g) | \exp(G)$.

b) Sei $\exp(G) = 2$. Zeigen Sie, dass G abelsch ist.

c) Finden Sie Gruppen H_1 und H_2 mit $\#H_1 = \#H_2 = 9$ und Exponenten $\exp(H_1) = 9$ und $\exp(H_2) = 3$.

Aufgabe 30
(4 Punkte)
Zeigen Sie:

a) Ist $p \in \mathbb{N}$ prim und $\#G = p$, dann ist G zyklisch.

b) Ist $H \leq G$ eine Untergruppe mit $(G : H) = 2$, dann ist H ein Normalteiler von G.

c) Sei $p \in \mathbb{N}$ prim mit $p \geq 3$. Sei $\#G = 2p$ und seien $r, s \in G$ mit $\operatorname{ord}(r) = 2$ und $\operatorname{ord}(s) = p$. Dann ist $\langle s \rangle$ ein Normalteiler von G. Folgern Sie, dass es ein $k \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft $(rs)^2 = s^k$ gibt.

Aufgabe 31
(4 Punkte)
Sei $H \leq G$. Zeigen Sie:

a) $K := \bigcap_{g \in G} H^g$ ist ein Normalteiler von G mit $K \leq H$, und jeder in H enthaltene Normalteiler von G ist in K enthalten.

b) $N_G(H) := \{g \in G : H^g = H\}$ ist eine Untergruppe von G mit $H \trianglelefteq N_G(H)$, und jede Untergruppe L von G mit $H \trianglelefteq L$ ist in $N_G(H)$ enthalten. Man nennt $N_G(H)$ den *Normalisator* von H.

Aufgabe 32
(4 Punkte)
Eine Untergruppe H von G bezeichnen wir als *charakteristisch*, in Zeichen $H \operatorname{char} G$, wenn für alle $\sigma \in \operatorname{Aut}(G)$ gilt: $H^\sigma = H$. Zeigen Sie:

a) Ist $H \operatorname{char} K$ und ist $K \operatorname{char} G$, so ist $H \operatorname{char} G$. (Transitivität von char.)

b) Ist $H \operatorname{char} K$ und ist $K \trianglelefteq G$, so ist $H \trianglelefteq G$.

c) Seien $r = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \in S_4$ (vgl. B1, IV.1.1). Sei $D_4 := \langle r, s \rangle \leq S_4$ die *Diedergruppe vom Grad* 4 und sei $V_4 = \langle r^2, s \rangle \leq D_4$ die *Kleinsche Vierergruppe*. Dann sind $\# D_4 = 8$ und $\# V_4 = 4$. Zeigen Sie zudem, dass $V_4 \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ und $\langle s \rangle \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Folgern Sie, dass $\langle s \rangle \trianglelefteq V_4 \trianglelefteq D_4$, aber $\langle s \rangle$ kein Normalteiler von D_4 ist.

Abgabe: Montag, 21. Dezember 2015, 10:00 Uhr, Briefkästen auf F4.