Fachbereich Mathematik und Statistik
Jun.-Prof. Dr. Arno Fehm
Lothar Sebastian Krapp
WS 2015 / 2016

Universität Konstanz

Übungen zur Vorlesung Algebra (B3)

Blatt 9
Zyklische Gruppen und semidirektes Produkt

Aufgabe 33
(4 Punkte)
Sei ϕ die Eulersche Phi-funktion. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $T_n := \{d \in \mathbb{N} : d|n\}$ die Menge der Teiler von n. Zeigen Sie:

a) Ist $n \geq 3$, so ist $\phi(n)$ gerade.

b) $n = \sum_{d \in T_n} \phi(d)$

c) Eine Gruppe G der Ordnung n ist genau dann zyklisch, wenn G zu jedem $d \in T_n$ höchstens eine Untergruppe der Ordnung d hat.

Aufgabe 34
(4 Punkte)

a) Sei $p \in \mathbb{N}$ prim und G eine Gruppe der Ordnung $2p$. Zeigen Sie, dass G ein Element der Ordnung 2 besitzt.

   Hinweis: Nehmen Sie zunächst an, jedes $g \in G \setminus \{1\}$ habe Ordnung p, und führen Sie dies zu einem Widerspruch.

b) Zeigen Sie: Jede Gruppe der Ordnung 6 ist isomorph zu S_3 oder zu C_6.

Aufgabe 35
(4 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass S_3 genau eine zyklische Untergruppe N der Ordnung 3 besitzt und dass für jede Untergruppe H von S_3 der Ordnung 2 gilt: $S_3 = H \ltimes N$.

b) Bestimmen Sie alle möglichen semidirekten Produkte $V_4 \ltimes_\alpha C_3$ der Kleinschen Vierergruppe V_4 und der zyklischen Gruppe C_3. Welche dieser semidirekten Produkte sind isomorph zueinander?

Aufgabe 36
(4 Punkte)
Sei $n \in \mathbb{N}$. Seien $C_2 = \langle h \rangle$ und $C_n = \langle g \rangle$ die zyklischen Gruppen der Ordnung 2 bzw. n mit Erzeuger h bzw. g. Sei $\alpha \in \mathrm{Hom}(C_2, \mathrm{Aut}(C_n))$ gegeben durch $g^{\alpha(h)} = g^{-1}$. Wir definieren die *Diedergruppe vom Grad* n durch $D_n := C_2 \ltimes_\alpha C_n$.

a) Zu welchen Ihnen bekannten Gruppen sind D_1, D_2 und D_3 isomorph?

b) Seien $r = (1, g)$ und $s = (h, 1)$ in D_n. Zeigen Sie: $s^2 = r^n = 1$ und $srs = r^{-1}$.

c) Sei $n \geq 3$. Sei $\psi : \{r, s\} \to S_n$ gegeben durch

$$\psi(r) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ 2 & 3 & \dots & n & 1 \end{pmatrix}, \psi(s) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ n & n-1 & \dots & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass sich ψ zu einer Einbettung von D_n nach S_n fortsetzt.

d) Zeigen Sie, dass eine endliche Gruppe G der Ordnung $2n$ genau dann zu D_n isomorph ist, wenn es zwei *Involutionen* (d. h. Elemente der Ordnung 2) $x, y \in G$ mit $G = \langle x, y \rangle$ gibt.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass die von xy *erzeugte Untergruppe Index* 2 *hat.*

Abgabe: Montag, 11. Januar 2016, 10:00 Uhr, Briefkästen auf F4.