
Übungen zur Vorlesung Algebra (B3)

Blatt 10
Gruppenwirkungen

Aufgabe 37

(4 Punkte)

Sei H eine Gruppe mit $H \neq 1$. Konstruieren Sie eine Gruppe G und eine Einbettung $i : H \times H \hookrightarrow G$ mit der Eigenschaft, dass $(G : i(H \times H)) = 2$ und die beiden Untergruppen $i(H \times 1)$ und $i(1 \times H)$ von G zueinander konjugiert sind.

Aufgabe 38

(4 Punkte)

- Eine Gruppe G der Ordnung 39 wirke auf einer Menge X mit 23 Elementen. Zeigen Sie: G hat einen Fixpunkt in X , d. h. es gibt ein $x \in X$ mit $x^G = \{x\}$.
- Sei $G = C_{39}$ und $X = \{1, 2, \dots, 23\}$. Finden Sie eine Wirkung von G auf X mit der Eigenschaft, dass G genau einen Fixpunkt in X hat.

Aufgabe 39

(4 Punkte)

Sei G eine endliche Gruppe und X eine endliche G -Menge. Für $g \in G$ sei $\text{Fix}(g) := \{x \in X : x^g = x\}$, die Menge der Fixpunkte von X unter g . Zeigen Sie:

$$\sum_{x \in X} \#G_x = \sum_{g \in G} \#\text{Fix}(g).$$

Folgern Sie, dass

$$\#X/G = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \#\text{Fix}(g).$$

Aufgabe 40

(4 Punkte)

Sei $X \subseteq \{0, 1\}^8$ die Menge aller 8-Tupel, die aus genau vier Nullen und vier Einsen bestehen. Jedes Tupel kann als Färbung der Seiten eines regulären Achtecks mit einer fixierten Nummerierung der acht Seiten aufgefasst werden, wobei 0 für die Farbe Schwarz und 1 für die Farbe Weiß steht. Dementsprechend wirkt D_8 , die Gruppe der Symmetrien eines regulären Achtecks, auf X . Zwei Färbungen $x, x' \in X$ sind genau dann äquivalent, wenn es ein $g \in D_8$ mit $x^g = x'$ gibt. Finden Sie die Anzahl der Äquivalenzklassen der Färbungen in X .

Abgabe: Montag, 18. Januar 2016, 10:00 Uhr, Briefkästen auf F4.