Fachbereich Mathematik und Statistik
Jun.-Prof. Dr. Arno Fehm
Lothar Sebastian Krapp
WS 2015 / 2016

Universität Konstanz

Übungen zur Vorlesung Algebra (B3)

Blatt 11
Sylow-Sätze

Aufgabe 41
(4 Punkte)
Seien G und H endliche Gruppen, $p \in \mathbb{N}$ prim, $S \in \mathrm{Syl}_p(G)$ und $\varphi : G \to H$ ein Homomorphismus. Zeigen Sie:

a) Ist $(G : S) < p$, so ist $S \trianglelefteq G$.

b) Ist K eine Gruppe mit $S \leq K \leq G$, so ist $S \in \mathrm{Syl}_p(K)$.

c) Ist φ injektiv, so gibt es $T \in \mathrm{Syl}_p(H)$ mit $\varphi^{-1}(T) \in \mathrm{Syl}_p(G)$.

d) Ist φ surjektiv, so ist $\varphi(S) \in \mathrm{Syl}_p(H)$.

Aufgabe 42
(4 Punkte)
Sei G eine Gruppe. Zeigen Sie, dass $(G : \mathrm{Z}(G)) \neq 15$.

Aufgabe 43
(4 Punkte)
Zeigen Sie, dass jede Gruppe der Ordnung 45 abelsch ist. Finden Sie für jede Isomorphieklasse einen Vertreter.

Aufgabe 44
(4 Punkte)
Eine endliche Gruppe G heißt *nilpotent*, wenn sie isomorph zum direkten Produkt ihrer Sylowgruppen ist.

a) Zeigen Sie: Jede endliche abelsche Gruppe ist nilpotent.

b) Zeigen Sie: Ist G eine endliche nilpotente Gruppe und $m \in \mathbb{N}$ mit $m \mid \#G$, so existiert eine Untergruppe H von G mit $\#H = m$.

c) Sei Q_8 die von den Matrizen

$$E := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ I := \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix},\ J := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } K := \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}$$

erzeugte Untergruppe von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$. Sei heißt die *gewöhnliche Quaternionengruppe.* Zeigen Sie, dass Q_8 endlich, nilpotent und nicht abelsch ist.

Abgabe: Montag, 25. Januar 2016, 10:00 Uhr, Briefkästen auf F4.