Fachbereich Mathematik und Statistik
Jun.-Prof. Dr. Arno Fehm
Lothar Sebastian Krapp
WS 2015 / 2016

Universität Konstanz

Übungen zur Vorlesung Algebra (B3)

Blatt 13
Normale Erweiterungen, Galoistheorie

Aufgabe 49
(4 Punkte)
Sei $L|K$ eine algebraische Körpererweiterung.

a) Zeigen Sie: Es gibt eine kleinste Erweiterung $\hat{L}|L$ mit $\hat{L}|K$ normal. Ist $L|K$ endlich bzw. separabel, so ist dies auch $\hat{L}|K$.

b) Sei K vollkommen und habe L die Eigenschaft, dass jedes $f \in K[X] \setminus K$ eine Nullstelle in L hat. Zeigen Sie, dass L algebraisch abgeschlossen ist. *Vergleichen Sie das mit dem Beweis von II.4.7!*

Aufgabe 50
(4 Punkte)
Seien $L|K$, $L_1|K$ und $L_2|K$ endliche Galoiserweiterungen und $E|K$ eine Körpererweiterung, alle Teilkörper eines Körpers M. Zeigen Sie:

a) $EL|E$ ist eine endliche Galoiserweiterung und die Abbildung $\sigma \mapsto \sigma|_L$ liefert einen Isomorphismus

$$\mathrm{Gal}(EL|E) \cong \mathrm{Gal}(L|E \cap L).$$

Hinweis zur Surjektivität: Bestimmen Sie den Fixkörper des Bildes der Abbildung.

b) Ist $L_1 \cap L_2 = K$, so liefert die Abbildung $\sigma \mapsto (\sigma|_{L_1}, \sigma|_{L_2})$ einen Isomorphismus

$$\mathrm{Gal}(L_1L_2|K) \cong \mathrm{Gal}(L_1|K) \times \mathrm{Gal}(L_2|K).$$

Aufgabe 51
(4 Punkte)
Seien $p, q, r \in \mathbb{N}$ paarweise verschiedene Primzahlen.

a) Bestimmen Sie $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{p}, \sqrt{q})|\mathbb{Q})$ und geben Sie für jeden Zwischenkörper F von $\mathbb{Q}(\sqrt{p}, \sqrt{q})|\mathbb{Q}$ ein primitives Element von $F|\mathbb{Q}$ an.

b) Bestimmen Sie $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{p}, \sqrt{q}, \sqrt{r})|\mathbb{Q})$ und die Anzahl der Zwischenkörper von $\mathbb{Q}(\sqrt{p}, \sqrt{q}, \sqrt{r})|\mathbb{Q}$.

Aufgabe 52
(4 Punkte)
Sei $f = X^4 - 2 \in \mathbb{Q}[X]$ und sei L ein Zerfällungskörper von f.

a) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Gal}(L|\mathbb{Q}) \cong D_4$.

b) Beschreiben Sie die 10 verschiedenen Untergruppen der D_4.

c) Bestimmen Sie die Zwischenkörper der Erweiterung $L|\mathbb{Q}$ und geben Sie für jeden Zwischenkörper $\mathbb{Q} \subseteq F \subsetneqq L$ ein primitives Element von $F|\mathbb{Q}$ an.

Abgabe: Montag, 08. Februar 2016, 10:00 Uhr, Briefkästen auf F4.